

Von wegen rund

DER BALL HAT SECHZIG ECKEN

Zum Sch(l)uss:
Wie ein Mathematiker
Fußball sieht.



Bild 1
Der WM-Globus am Steintor in
Hannover
Foto: Fritz Borker

Der Fußball verbindet nicht nur Nationen, sondern auch verschiedene wissenschaftliche Disziplinen. Er interessiert zum Beispiel die Mathematiker. Alt-Bundestrainer Sepp Herberger verkündete: »Der Ball ist rund«. Aber ist das wirklich wahr? Sehen wir uns den Ball an, mit dem seit der Fußballweltmeisterschaft 1970 in Mexiko gespielt wird. Seine Oberfläche ist strukturiert, er ist aus fünf- und sechseckigen Lederstücken zusammengesetzt. Die Form, die sich dabei ergibt, konnte man sehr gut an dem WM-Globus erkennen, der von Oktober bis Dezember des vergangenen Jahres in Hannover am Steintor stand (siehe Bild 1).

Die Mathematiker nennen einen solchen Körper ein abgestumpftes Ikosaeder. Das ist ein Körper, der aus regelmäßigen Fünf- und Sechsecken zusammengesetzt ist. Regelmäßig bedeutet dabei, dass alle Winkel gleich groß und alle Kanten gleich lang sind. Es gibt 60 Ecken, an denen jeweils ein regelmäßiges Fünfeck und zwei regelmäßige Sechsecke zusammenstoßen. Egal von welcher Ecke aus man ihn anschaut, so sieht der Fußball immer gleich aus. Das abgestumpfte Ikosaeder ist ein sehr symmetrischer Körper. Man kann es auf 60 verschiedene Arten drehen, ohne dass sich das Bild ändert. Lässt man diesen Drehungen noch

eine Punktspiegelung am Mittelpunkt des Fußballs folgen, so findet man insgesamt 120 Symmetrieoperationen.

Körper, die aus regelmäßigen Vielecken zusammengesetzt sind und von jeder Ecke aus gleich aussehen, wurden schon in der Antike studiert. Archimedes (285–212 v. Chr.) hat bereits solche Körper betrachtet. Man nennt sie daher archimedische Körper. Hat man nur eine Art von Vielecken, also zum Beispiel nur Fünfecke, so spricht man von einem platonischen Körper. Es gibt genau fünf platonische Körper: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder. In Bild 2 sind »Skelettmodelle« dieser Körper dargestellt, die mit dem Computeralgebrasystem MAPLE erzeugt wurden.

Plato (427–347 v. Chr.) ordnete in seinem Dialog »Timaios« die vier Körper Tetraeder, Würfel, Oktaeder und Ikosaeder den vier »Elementen« seines Weltbilds Feuer, Erde, Luft und Wasser zu. Das Dodekaeder reservierte er als Symbol für das Universum. Johannes Kepler (1571–1630) benutzte in der 1596 veröffentlichten Schrift »Mysterium Cosmographicum« die platonischen Körper, um unser Planetensystem zu beschreiben. Zur damaligen Zeit waren sechs Planeten bekannt, die sich nach dem kopernikanischen Weltbild auf kreisförmigen Bahnen um die Sonne bewegen. Kepler bemerkte, dass man zwischen je

zwei aufeinander folgenden Kugeln, auf denen diese Bahnen liegen, jeweils einen geeigneten platonischen Körper einbeschreiben konnte, so dass die Ecken auf der äußeren Kugel lagen und die Flächen die innere Kugel berührten (siehe Bild 3). Mathematisch ausgedrückt ist die äußere Kugel die Umkugel und die innere die Inkugel für den betreffenden platonischen Körper. Dies stimmte gut mit den von ihm beobachteten Verhältnissen der Radien der Planetenbahnen überein. Später entdeckte Kepler, dass die Planetenbahnen Ellipsen sind. Trotzdem behielt er in einer zweiten Auflage seines Buches im Jahre 1621 das oben beschriebene Modell bei.

Heute wissen wir natürlich, dass diese Erklärungen fundamentaler Probleme des Weltalls falsch waren. Trotzdem haben die platonischen Körper eine fundamentale Bedeutung in der Mathematik und sie treten selbst bei neueren Untersuchungen in der Mathematik und in der theoretischen Physik immer wieder in teilweise versteckter und mysteriöser Form auf, zum Beispiel in der Singularitätentheorie (siehe das Kapitel »The Mysticism of Catastrophe Theory« in dem unten angegebenen Buch des russischen Mathematikers V. I. Arnold).

In seinem Werk »Harmonices Mundi« beschreibt Kepler auch die archimedischen Körper. Wenn man von den so genannten Prismen und Antiprismen einmal absieht, so gibt es außer den platonischen Körpern 13 weitere archimedische Körper. Einer davon ist das abgestumpfte Ikosaeder (siehe Bild 4). Dieser Name stammt übrigens auch von Kepler. Das abgestumpfte Ikosaeder erhält man, indem man bei dem Ikosaeder die Ecken so abschneidet, dass alle neu entstehenden Kanten gleich lang sind. Das Ikosaeder hat 12 Ecken und, das besagt auch der Name, 20 Flächen, nämlich



Bild 2a
Tetraeder



Bild 2b
Würfel



Bild 2c
Oktaeder



Bild 2d
Dodekaeder



Bild 2e
Ikosaeder

20 Dreiecke. An jeder Ecke kommen 5 Dreiecke zusammen. Schneiden wir also die Ecken ab, so wird aus jeder Ecke ein Fünfeck und aus jedem Dreieck ein Sechseck. So entstehen die 12 Fünfecke und die 20 Sechsecke des Fußballs. Unter den 18 archimedischen Körpern kann man nun die betrachten, die möglichst »rund« sind. Das kann man mathematisch so präzisieren: Das Verhältnis des Radius der Inkugel zu dem Radius der Umkugel ist möglichst groß, das heißt möglichst nahe bei 1. Das abgestumpfte Ikosaeder ist zwar nicht der rundeste unter den archimedischen Körpern, es ist aber dadurch ausgezeichnet, dass es unter den relativ runden derjenige Körper mit den wenigsten Flächen und wenigsten Kanten ist.

Das älteste bekannte Bild des Fußballs findet man bei dem italienischen Maler und Mathematiker Piero della Francesca (1420–1492). Auch Leonardo da Vinci (1452–1519) hat den Fußball gezeichnet. Seine Zeichnung lieferte wahrscheinlich die Vorlage für das Modell des Fußballs, das man in der Kirche Santa Maria in Organo in Verona findet (Bild 5).

Aber auch in der Kunst und Architektur der neueren Zeit fand der Fußball Verwendung. Der amerikanische Architekt Richard Buckminster Fuller (1895–1983) ist für seine Kuppeln (geodesic domes) berühmt, er konstruierte zum Beispiel die Kuppel des amerikanischen Pavillons auf der Expo 1967 in Montreal. Dabei verwendete er Verstrebungen in Form von Fünf- und Sechsecken. Er trug zur Namensgebung einer erstaunlichen Entdeckung in der Chemie bei. Im Jahre 1985 entdeckten die Chemiker Harold Kroto, James Heath, Sean O'Brien, Robert Curl und Richard Smalley eine neue Kohlenstoffverbindung mit der Summenformel C_{60} . In diesem Molekül sind 60 Kohlenstoffatome so angeordnet,



Bild 3
Keplers Universum



Bild 5
Intarsien aus der Kirche Santa Maria in Organo



Bild 4
Das abgestumpfte Ikosaeder (Zeichnung mit MAPLE)



Prof. Dr. Wolfgang Ebeling

Jahrgang 1951, ist Professor am Institut für Algebraische Geometrie, Arbeitsgebiete: Algebraische Geometrie, Singularitätentheorie.

dass sie genau die Ecken eines Fußballs bilden. Nach Fuller nennt man derartige Moleküle (Buckminster-)Fullerene. Natürlich stimmt bei diesem Modell der Maßstab nicht: Wenn das Molekül die Größe eines Fußballs hätte, so hätte der Fußball etwa die Größe unserer Erdkugel. Die aus mathematischer Sicht herausragendste Eigenschaft des Fulleren C_{60} ist die große Symmetrie: Nach dem derzeitigen

Stand der Wissenschaft ist es das Molekül mit den meisten Symmetrien. Für ihre Entdeckung erhielten Curl, Kroto und Smalley 1996 den Nobelpreis für Chemie.

Ein Nachtrag: Der offizielle Ball »Teamgeist«, der bei der WM 2006 verwendet werden soll, sieht auf den ersten Blick ganz anders aus. Aber auch ihm liegt die Struktur des alten Fußballs zugrunde.

Literatur

- Arnold, V. I.: Catastrophe Theory. 3. Auflage. Springer-Verlag, Berlin 1992.
- Beutelspacher, A.: »In Mathe war ich immer schlecht ...« 3. Auflage. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 2001.

Links

- www.brefeld.homepage.t-online.de/fussball.html
- www.fkf.mpg.de/andersen/fullerene
- www.wikipedia.de: Archimedische Körper, Platonische Körper

