Seiner Zeit voraus gedacht

DIE EINFÜHRUNG DES BINÄRSYSTEMS DURCH LEIBNIZ

Leibniz formulierte bereits 1697 das binäre System, Basis der heutigen Rechnertechnologie, bei dem die Zahlen ausschließlich durch Ziffern 0 und 1 dargestellt werden. Richtig genutzt werden kann dieses System aber erst im 20. Jahrhundert, durch die neu entwickelten Rechnersysteme – wie weit Leibniz die technische Entwicklung voraus gedacht hatte, erläutert ein Wissenschaftler des Instituts für Mikroelektronische Systeme.

Leibniz hatte die Fähigkeit, sich selbstständig in neue wissenschaftliche Zusammenhänge einzuarbeiten. Er hat vielfältige eigene Beiträge zur Philosophie, Mathematik, Physik und zu ingenieurmäßigen Lösungen geliefert. Zu seinen wichtigen Beiträgen zählt auch die Einführung des Binärsystems.

Um die Situation im 17. Jahrhundert zu verstehen, soll kurz der Status der Zahlendarstellung und die Entwicklung dahin erläutert werden.

Die Einführung besonderer Zeichen für Zahlen ist bereits seit dem 3. Jahrtausend v. Chr. bekannt. Erste Ziffernsysteme mit Aneinanderreihung und Substitution von Zeichen zur Zahlendarstellung wurden in dieser Zeit in Ländern wie Ägypten und Persien eingeführt. Das Positionssystem mit einer eindeutigen Stellenschreibweise ist bereits seit dem 6. Jahrhundert v. Chr. aus Indien bekannt. Für das Dezimalsystem gibt es seit dem 4. Jahrhundert v. Chr. Hinweise aus China. Die Erfindung der Null geht auf Hindus und Araber zurück. Die Null wird bereits 850 v. Chr. erwähnt. Die Dezimalzahlen mit Ziffern in ihrer Hindu-arabischen Schreibweise sind in Europa ab etwa dem 1. Jahrtausend üblich.

Um 1550 ist das Standardwerk des Mittelalters in Deutschland das, in verschiedenen Varianten existierende, Rechenbuch von Adam Riese. Es enthält die Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Neben vielen spezifischen Sonderfällen sind Bruchrechenregeln (rationale Brüche) und das Wurzelziehen enthalten.

Bis zum 17. Jahrhundert gab es etliche Weiterentwicklungen des Zahlenrechnens. Hierzu gehörte auch die Einführung von Logarithmentafeln von John Napier in 1614 zur Beschleunigung und Vereinfachung von Multiplikationen und Divisionen.

Der kurze Abriss soll zeigen, dass im 17. Jahrhundert die Verwendung von Dezimalzahlendarstellungen fest etabliert war und diese Ausgangspunkt für alle Zahlenrechnungen war.

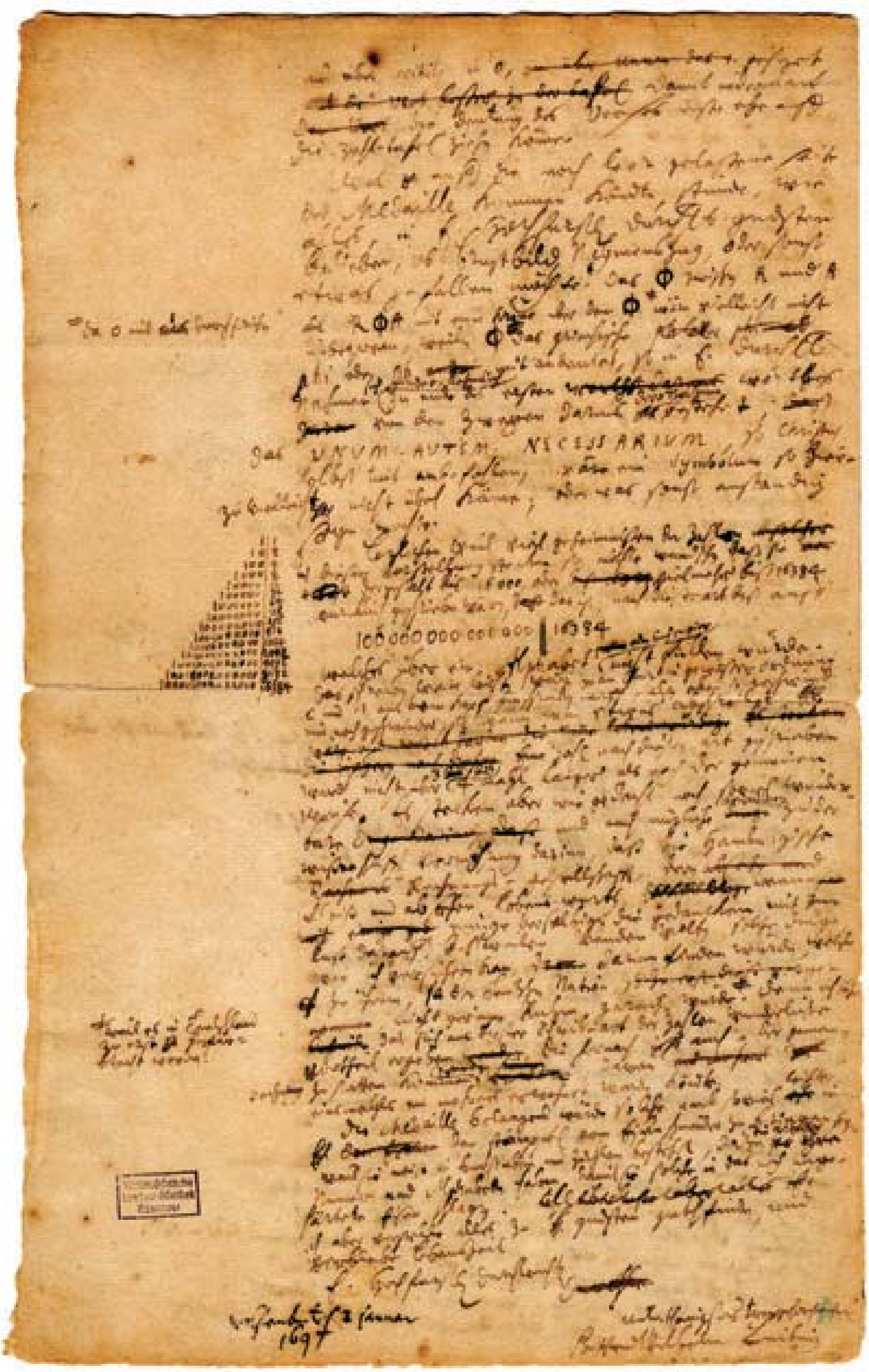
In dieser Zeit führte Leibniz ein dyadisches Zahlensystem (zweiwertiges System) ein, für das an sich keine praktische Notwendigkeit bestand. Leibniz war philosophisch geprägt und wollte nach seiner Auffassung Mathematik und Natur verbinden. Für ihn war das dyadische System eine göttliche Offenbarung.

In einem Brief stellt Leibniz 1697 dem Herzog von Braunschweig-Wolfenbüttel [1] das dyadische Zahlensystem vor. Er schreibt, dass der Geist Gottes mit seinem Lichte zur Eins gehört und die leere Tiefe und wüste Finsternis zu Null und Nichts. In diesem Brief führt er dann weiter aus, wie durch Ausdrücken bloß allein mit Einsen und Nullen alle Zahlen entstehen. Das Natürliche der neuen Zahlendarstellung wird herausgehoben. So führt er aus, dass der 7. Tag der Schöpfung durch 111 codiert wird. Diese Vollkommenheit des heiligen 7. Tages wird dadurch wiedergegeben, dass keine 0 für diese Zahl erforderlich ist und ein Bezug zur Dreifaltigkeit gegeben ist.

Trotz dieser mystisch wirkenden Erklärungen hat Leibniz das mathematische Fundament dyadischer Zahlen korrekt formuliert.

Bild 1 zeigt eine Seite des vorher zitierten Briefes. Am Rande ist die Schreibweise der Zweierpotenzen bis 16384 aufgeführt. In Bild 2 ist diese Auflistung der Darstellung von Zweierpotenzen separat aufgelistet. In dem vorher genannten Brief wird darüber hinaus an einem Beispiel exemplarisch gezeigt wie für beliebige ganze Zahlen entsprechende Darstellungen gewonnen werden. Dies ist in Bild 3 gezeigt. In Bild 4 ist der Vorschlag einer Medaille von Leibniz zur Einführung des dyadischen Zahlensystems dargestellt.

Eine dyadische (2-adische) Darstellung von Zahlen ist ein Zahlensystem mit den Ziffern 0 und 1 und ihren zugehörigen Werten. Ein Stellenwertsystem mit der Basis 2 ist ein spezielles dyadisches Zahlensystem, das als Dualzahlensystem bezeichnet wird.


UNUM AUTEM NECESSARIUM

1697

Bild 1
Ausschnitt eines Briefes von Leibniz an den Herzog von Braunschweig-Wolfenbüttel im Jahr 1697
Quelle: Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek Hannover, LBR II, I, Vol. 15, Bl. 19v

Dieses Dualzahlensystem hat positive Ziffernwerte 0 und 1 mit Zweierpotenzen als Stellenwerte für die Ziffernpositionen. Dualzahlen können nur zur Repräsentation positiver Zahlen verwendet werden.

Für n-stellige Dualzahlen gilt eine Darstellung

$$A = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0 \quad a_i \in \{0,1\},$$

wobei der Wert als Summe der gewichteten Stellenwerte ermittelt wird.

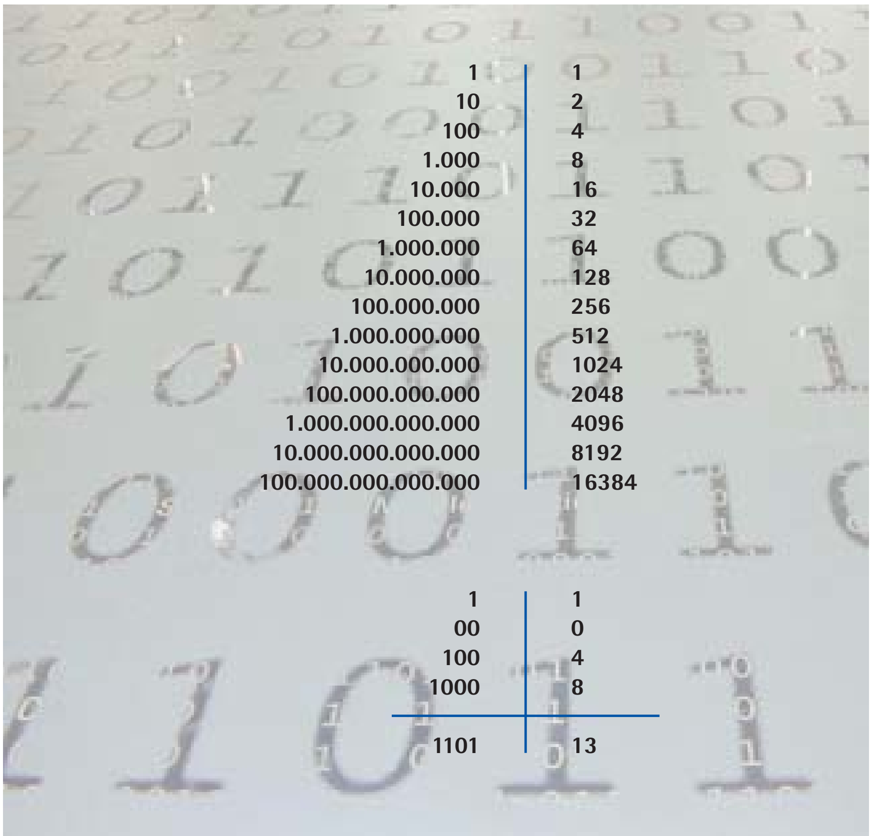


Bild 2 (oberer Teil)
Schreibweise der Zweierpotenzen in dyadischer Form

Bild 3 (unterer Teil)
Dyadische Codierung der Dezimalzahl 13
Quelle: Hintergrund Photocase

$$V(A) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i \qquad a_i \in \{0,1\}.$$

Wird die Summierung im Dezimalzahlensystem durchgeführt, erhält man die zugehörige Dezimalzahl.

Es wird hier eine Unterscheidung zwischen Darstellung von Zahlen und deren zugehörigen Werten gemacht. Für die üblichen Zahlendarstellungen wie beispielsweise Dezimalzahlen wird im Allgemeinen keine Unterscheidung zwischen diesen zwei an sich unterschiedlichen Aspekten gemacht. Durch entsprechende Erläuterung während des Lernens der Zahlendarstellungen wird die Darstellung der Zahl gleichzeitig auch als Synonym für den Wert eingeführt. Dies war bereits auch im Mittelalter so und wurde von Leibniz auch für seine dyadischen Zahlen vorausgesetzt.

Erst moderne alternative Binärcodierungen von Zahlen machen diese Unterscheidung notwendig.

Beispiel: $A = (10110)_2$

$$V(A) = 2^4 + 2^2 + 2^1 = (22)_{10}$$

Die zugehörige Klammerung mit tiefgestellter 2 bzw. 10 soll das verwendete Zahlensystem (2 = dual, 10 = dezimal) eindeutig klarstellen.

Allgemeine Codierungen von Symbolen mit einem zweiwertigen Symbolvorrat werden als Binärcodierungen bezeichnet. Codierungen von Zahlen mit zweiwertigem Symbolvorrat führen auf Binärzahlen. Entsprechend sind Dualzahlen auch Binärzahlen. Jedoch sind Binärzahlen eine allgemeinere Repräsentation. So können Binärzahlen auch Stellenwertigkeiten haben, die von der üblichen Zweierpotenzregel abweichen und es sind auch negative Stellenwertigkeiten möglich.

Als ein Beispiel einer Binärcodierung mit negativer Stellenwertigkeit sei das Zweierkomplement vorgestellt.

Für eine n-stellige Zweierkomplementzahl gilt eine Darstellung

$$\overline{A_2} = a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0 \quad a_i \in \{0,1\}.$$

Der zugehörige Wert wird mit negativer Gewichtung der ersten Stelle berechnet.

$$V(\overline{A_2}) = -2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^i$$

Beispiel: $\overline{A_2} = 101101$

$$V(\overline{A_2}) = -2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = -19$$

Durch Vergleich mit den Kenntnissen heutiger Zahlenrepräsentationen kann man feststellen, dass Leibniz ganzzahlige Dualzahlen eingeführt hat, jedoch ohne die Verwendung der heute üblichen Potenzschreibweise. Hierzu muss man wissen, dass im 17. Jahrhundert diese Potenzschreibweise noch nicht üblich war. Im Sinne von Leibniz müsste der Wert der Dualzahlen wie beispielhaft nachfolgend dargestellt bestimmt werden.

$$A = a_4a_3a_2a_1a_0$$
$$A = a_4(10000) + a_3(1000) + a_2(100) + a_1(10) + a_0(1)$$

Leibniz hat nicht nur die Darstellung der Dualzahlen eingeführt, er hat auch erläutert wie die Grundrechenarten in diesem neuen Zahlensystem durchzuführen sind. Hierzu sei sein Artikel »Explication de l'Arithmétique Binaire«, 1703 zitiert. Mit diesem Artikel hat er sein wissenschaftliches Debüt als Mitglied der berühmten Pariser Akademie der Wissenschaften gegeben. Ein Ausschnitt dieses Artikels ist in Bild 5 gezeigt. Die exemplarische Erläuterung von Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ist in diesem Artikel so klar, dass sie auch heute für Studierende sofort verwendbar ist.

Leibniz hatte erkannt, dass die Dualzahlen etwa viermal län-

Bild 4 (rechts)
Medaillen-Entwurf von Leibniz zur Veranschaulichung des Dualzahlensystems (1697)
Quelle: Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek Hannover, Leibnizmünze

ger als Dezimalzahlen sind. Jedoch machte er die Aussage:

»Denn ich sehe, dass sich aus dieser Schreibart der Zahlen wunderliche Vorteile ergeben werden, die hernach auch in der gemeinen Rechnung zu statten kommen würden, davon einstmals ein Mehreres erwähnet werden könnte.«

Dieser Apparat besteht aus einer schiefen Laufschiene. Jede Stelle der Zahl kann durch eine Metallkugel (Wert 1) oder keine Metallkugel (Wert 0) repräsentiert werden. An jeder Stelle kann nur eine Kugel durch den mechanischen Aufbau aufgenommen werden. Durch eine mechani-

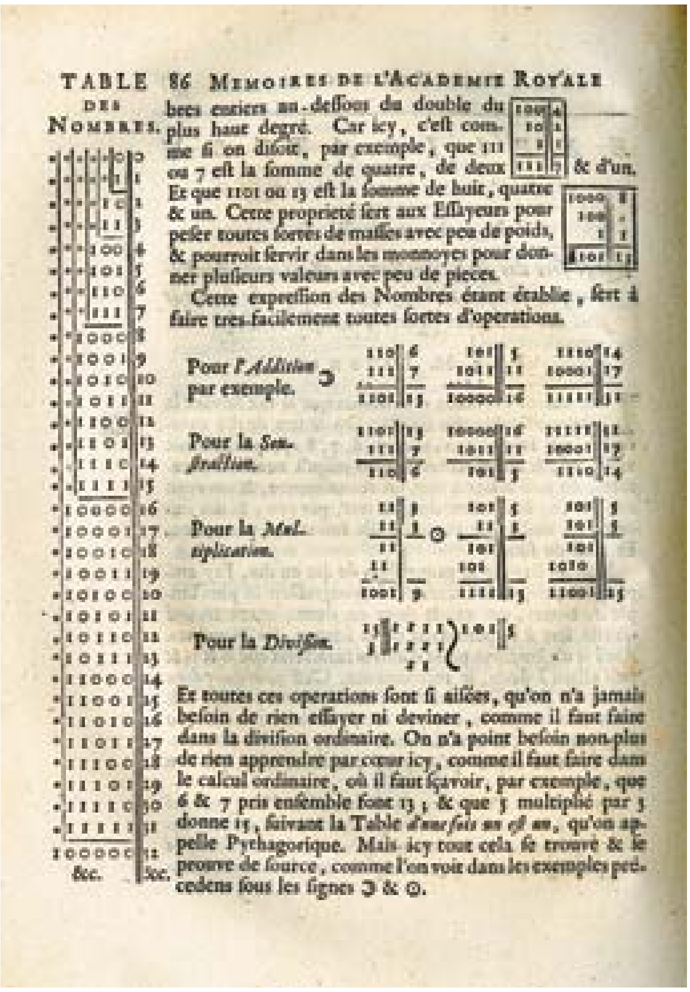


TABLE DES NOMBRES. 86 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

bres entiers au-dessous du double du plus haut degré. Car icy, c'est comme si on disoit, par exemple, que 111 ou 7 est la somme de quatre, de deux & d'un. Et que 1101 ou 13 est la somme de huit, quatre & un. Cette proprieté sert aux Essayeurs pour peser toutes sortes de masses avec peu de poids, & pourroit servir dans les monnoyes pour donner plusieurs valeurs avec peu de pieces.

Cette expression des Nombres étant établie, sert à faire tres-facilement toutes sortes d'operations.

Pour l'*Addition* par exemple.

Pour la *Soustraction*.

Pour la *Multiplication*.

Pour la *Division*.

Et toutes ces operations sont si aisées, qu'on n'a jamais besoin de rien essayer ni deviner, comme il faut faire dans la division ordinaire. On n'a point besoin non-plus de rien apprendre par cœur icy, comme il faut faire dans le calcul ordinaire, où il faut sçavoir, par exemple, que 6 & 7 pris ensemble font 13; & que 5 multiplié par 3 donne 15, suivant la Table d'une fois un est un, qu'on appelle Pythagorique. Mais icy tout cela se trouve & se prouve de source, comme l'on voit dans les exemples precedens sous les signes ☽ & ⊙.

Bild 5
Seite aus »Explication de l'Arithmétique Binaire«, 1703
Quelle: Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek Hannover, Aa-A 9, 1703 S.86

Im Prinzip hatte er frühzeitig erkannt, dass die Realisierungen von Rechenoperationen in diesem System deutlich einfacher sind und folglich auch schneller durchzuführen sein sollten. Mit dieser Überlegung war er seiner Zeit weit voraus.

Leibniz hat auch einen Vorschlag einer »Machina arithmeticae dyadicae« beschrieben, die eine mechanische Realisierung eines Dualzahlen-Rechners nicht unter Verwendung von Zahnrädern sondern mit Kugeln ist.

sche Realisierung von Wippen und schiefer Ebene wird die erforderliche Übertragsmechanik realisiert.

Erst 1937 wurde von George Stibitz ein Relais-gestützter Rechner »Modell K« mit Realisierung der Addition im Dualzahlensystem vorgestellt. Konrad Zuse hatte bereits 1935 einen programmgesteuerten Binärrechner geplant. Dieser wurde als Z3 im Jahr 1941 funktionsfähig in Relaistechnik fertig. Die ENIAC war ein Binärrechner in Röhrentechnik. Planungen hierzu starteten 1943, Inbetriebnahme war 1946. Dies war ein extrem großer Rechner mit erheblicher Leistungsaufnahme. Eine kontinuierliche Betriebszeit war nur für eine Stunde möglich. Der Durchbruch für die Rechnerrealisierungen kam mit der Erfindung des Transistors durch John Bardeen, Walter H. Brattain und William B. Shockley in 1947. Eine erste Rechnerrealisierung mit Transistoren ist von den Bell Laboratories in 1957 vorgestellt worden. Die Entwicklung der Technologie zur Herstellung integrierter Schaltungen durch Jack Kilby in 1958 bringt einen erheblichen Schub in der Weiterentwicklung der Rechnersysteme.

Mit dem Intel Prozessor 4004 beginnt 1971 die Zeit der integrierten Mikroprozessoren. Die Entwicklung der Halbleitertechnologie folgt weitgehend dem Mooreschen Gesetz mit einer Verdopplung der Transistorzahl je Chip alle 18 Monate. Diese Weiterentwicklung führt zu den massiven Fortschritten von integrierten Prozessoren mit heutzutage ungefähr 100 Millionen Transistoren. Die erzielbaren Taktraten von einigen Gigahertz ermöglichen extrem hohe Rechenleistungen.

Die Entwicklung von Rechnern mit binär-orientierten Rechenwerken liegen nur 70 Jahre zurück. Es gibt einen exponentiellen Anstieg der Rechnerkomplexität insbesondere in den vergangenen Jahren. Basis für die Rechnerarchitekturen sind Grundlagen der Zahlendarstellung und Booleschen Algebra, die vor mehr als hundert Jahren formuliert wurden. Startpunkt dieser ganzen Entwicklung war Leibniz Ende des 17. Jahrhunderts mit der Einführung der Dualzahlendarstellung und Formulierung der Grundrechenarten in dieser Zahlendarstellung.

Der zeitliche Verlauf der Rechnerentwicklung zeigt, dass Leibniz die technische Entwicklung weit voraus gedacht hat.

Prof. Dr.-Ing. Peter Pirsch
Jahrgang 1942 ist seit 1987 Professor für Mikroelektronische Architekturen und Systeme und Leiter des Instituts für Mikroelektronische Systeme.

Literatur

1 http://www.fh-augsburg.de/~harsch/germanica/Chronologie/17Jh/Leibniz/lei_bina.html
2 http://de.wikipedia.org/wiki/Dualsystem
3 K. Popp, E. Stein, Gottfried Wilhelm Leibniz, Schlüterscher Verlag, Hannover, 2000