Catenaria

LEIBNIZ UND DIE KETTENLINIE

Leibniz bemühte sich 1679 um die Verbesserung des Transportes im Harzer Bergbau durch neuartige Förderketten. Obwohl die Erfolge für den Bergbau gering waren, da sich die Kettenelemente in den schrägen Schächten leicht verhakten, ist es gut denkbar, dass Leibniz diese Probleme zum Anlass für die theoretische Beschäftigung mit Kettenlinien nahm. Seine Publikationen zu diesem Thema wurden ein wesentlicher Auslöser für die Verbreitung der von ihm und Newton neu entdeckten höheren Analysis.

Unser Beitrag über diese Perle im *mathematischen* Werk des Universalgenies Leibniz stützt sich auf einen kleinen Ausschnitt aus seinem immensen Briefwechsel, der bis heute Fachwissenschaftler wie Historiker in Atem hält und die ergiebigste Quelle bei der Erkundung seines Lebenswerkes darstellt.

Für die großen Geister der damaligen Zeit war es eine Selbstverständlichkeit, ihre Korrespondenz mehrsprachig zu führen, meist auf lateinisch oder französisch, teilweise auch in einem für das heutige Ohr amüsant klingenden Deutsch; einzelne Passagen bilden gar ein babylonisches Sprachengemisch. Bewunderung muss man auch der damaligen Nachrichtenübertragung durch die persönlichen Kuriere der Korrespondenten zollen – vielfach gingen mehrere Depeschen innerhalb eines Monats oder sogar einer Woche zwischen den europäischen Metropolen hin und her. Von solcher Zuverlässigkeit können Postkunden des 3. Jahrtausends oft nur träumen!

Theoria cum Praxi: Bergwerke, Windmühlen und Aufzüge

Wie sein berühmtester Vorgänger in der Antike, der Syrakusaner Archimedes, war Leibniz bei aller Begeisterung für die zweckfreie Erforschung des Schönen und Exakten in den Wissenschaften keineswegs weltfremder Elfenbeintürmer. Die Verbindung von Theorie und Praxis galt ihm als höchste Maxime: »Die Kunst der Practick steckt darinn daß man die zufälle selbst unter das joch der wißenschaft so viel thunlich bringe.«

Doch nicht immer führten die Ideen des Denkers Leibniz zum erhofften Erfolg – manches Mal zerbrachen sie an der Realität.

So hatte er sich als 33-jähriger Hofrat in Hannover erbötig gezeigt, dem Harzer Bergbau, einer der wichtigsten Ertragsquellen des Landes, aus der Krise zu helfen, und hatte, obgleich Neuling auf diesem Gebiet, den Zuschlag für die anspruchsvolle Aufgabe bekommen. Die großen Energiemengen, die zur Förderung des Erzes und für den weiteren Transport erforderlich waren, beabsichtigte Leibniz durch neuartige Konstruktionen zu gewinnen – wie ehedem sein antikes Vorbild aus Syrakus. So entwarf er unter anderem eine »Windkunst«, eine Variante der üblichen Windmühlen mit senkrechter statt waagerechter Achse und einer Schar zyklisch darum herum angeordneter Paravents (»vor dem Wind«!), welche die Windkraft optimal schleusen sollten, egal aus welcher Richtung sie kam.

Im Prinzip eine gute Idee, die aber leider auf physikalische Grenzen stieß – die Wirkung der neuen Modelle konnte mit den alt hergebrachten Mühlen nicht konkurrieren. Schließlich wurden die finanziellen Zuschüsse zur Verwirklichung dieser und ähnlicher Erfindungen eingestellt – der Kampf mit den Windmühlen scheiterte damals wie heute an der harten finanziellen Wirklichkeit.

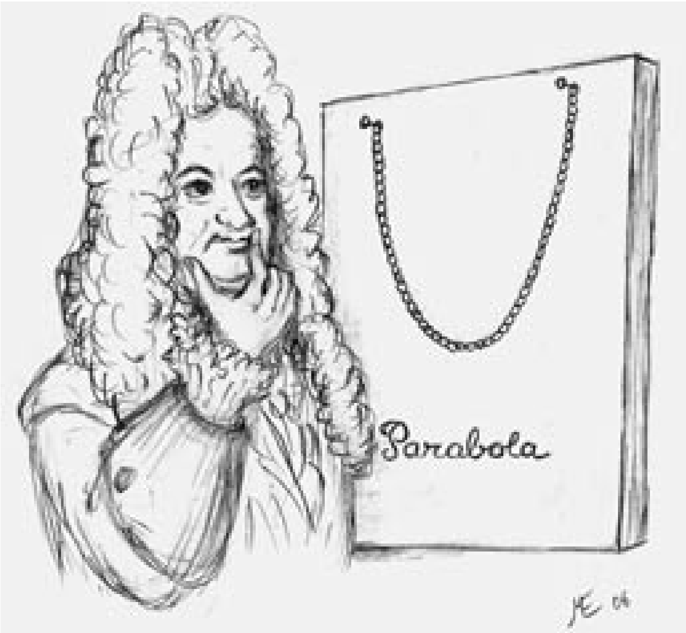
Ähnlich erging es Leibniz mit einer anderen Erfindung: An ringförmig geschlossenen Förderketten sollten Gegengewichte die hohen Lasten kompensieren – ein heute noch beim Bau von Aufzügen angewandtes Prinzip. Leider bewegten sich die Ketten in den Schächten des Bergbaus aber nicht vertikal, sondern schräg – was zu ständigen Verhakungen infolge des Durchhangs der Ketten führte.

Es ist nur eine Spekulation, aber nicht unplausibel, dass Leibniz damals aus der Not eine Tugend machte und intensiv über die Kettenlinie nachzudenken begann – wie sich herausstellen sollte, mit großem Erfolg für den mathematisch-physikalischen Fortschritt, aber leider ohne Auswirkung auf die Probleme des Harzer Bergbaus.

Parabola: Gleichnis oder Wahrheit?

Im Jahre 1970 durfte man in Avignon anlässlich einer modernen Kunstausstellung ein Gebilde von tiefster Aussagekraft bestaunen: Der hochbegabte Künstler hatte an einem senkrecht stehenden Brett zwei Nägel befestigt und daran eine Kette aufgehängt. Darunter stand das bedeutungsschwangere Wort: **Parabola**. Was wollte der Künstler uns damit sagen? Dass hier das Bild einer Parabel $y = cx^2$ zu sehen war (wie das mehr als dreihundert Jahre früher kein Geringerer als der große Mathematiker, Physiker und Astronom Galilei fälschlich angenommen hatte) – oder sollte es sich um eine Parabel im übertragenen Sinne handeln, um ein Gleichnis für etwas, dessen Ergründung uns verschlossen bleibt? Oder hatte der Namensgeber die einschlägigen Fakten im Physikunterricht schlicht verpasst?

Wie dem auch sei, Christiaan Huygens, neben Leibniz und Newton einer der großen Fixsterne am Himmel der mathematisch-physikalischen Koryphäen des 17. Jahrhunderts, hatte bereits um 1645 entdeckt, dass die *Kettenlinie* (**Catenaria**), also die Kurve, die eine durchhängende Kette beschreibt, hochinteressante Eigenschaften hat, aber *keine* Parabel sein kann – jedenfalls erwähnt er das 1690 in einem Brief an Leibniz.



Figur 1 (oben)
Parabel oder nicht?

Figur 2
Golden Gate mit parabolischen Hängekabeln

Wenngleich für Leibniz der wohlwollende, aber auch kritische geistige Ziehvater in mathematischen und physikalischen Fragen, konnte und wollte er dessen revolutionären Neuerungen durch den **Calculus Differentialis** zunächst nicht folgen, doch schrieb er später sinngemäß: »Ich habe überlegt, warum mir mehrere Ihrer Entdeckungen entgangen waren, und kam zu dem Schluss, dass dies ein Effekt Ihrer neuen Rechenmethode sein müsste, die Ihnen, wie es scheint, Wahrheiten eröffnet, die Sie nicht einmal selbst gesucht hatten, … da Sie in Ihrem Bericht über die Catenaria sagten, Ihr Kalkül hätte Ihnen diese Dinge wie von selbst geliefert, was wahrlich prächtig ist.« Zur Ehrenrettung des großen Galilei und des Künstlers in Avignon sei gesagt, dass die Idee von der Parabel so schlecht nicht ist: Hängen an dem Seil gleichmäßig verteilte Gewichte, so nimmt es tatsächlich annähernd die Gestalt einer Parabel an – ein Phänomen, das man bei den großen Hängebrücken dieser Welt in Augenschein nehmen kann. Und die Abweichung einer Kettenlinie von einer Parabel ist tatsächlich sehr gering, sofern die Durchhangneigung nicht zu groß wird.

Ein Wissenschaftler der Fakultät für Mathematik und Physik erläutert die auf Leibniz zurückgehenden Erkenntnisse über Kettenlinien und den damals üblichen Kommunikationsstil unter Wissenschaftlern.

Enigma Hugenii: Nur nicht zuviel verraten

Was man aus dem Briefwechsel von Leibniz leider selten erfährt, sind Beweise für die entdeckten Theoreme. In der damaligen Epoche herrschte (zu Recht, wie die erbitterten Prioritätsstreitigkeiten zeigen) eine hysterische Sorge, Kollegen könnten geistigen Diebstahl begehen. Das führte soweit, dass häufig selbst die Theoreme nur noch chiffriert mitgeteilt wurden, weshalb bestenfalls derjenige Briefpartner den Inhalt erraten konnte, der genau wusste, worum es ging. Eine Kostprobe aus einem Brief von Huygens an Leibniz (1690):

$$\frac{ri}{a} \propto c \cdot \frac{ci}{a} \propto e \cdot \frac{1}{2} rc + \frac{2}{3} ec \propto S \cdot \Theta \sqrt{2rv} \propto s \cdot c \cdot 45r \propto c \cdot 10000 \cdot 8809 \cdot 4134 \cdot$$
$$xxyy \propto a^4 - aayy \cdot xxyy \propto aaxx - aayy \cdot d \cdot h \cdot c \cdot q \cdot c \cdot p \cdot q \cdot i \cdot p \cdot e \cdot t \cdot i \cdot i \cdot p \cdot e \cdot r \cdot e \cdot i \cdot i \cdot i \cdot a^{n}$$

Nicht nur wir, sondern vermutlich alle unerwünschten Mitleser der damaligen Zeit konnten sich daraus schwerlich eine Lösung des Problems der Kettenlinie zusammenreimen. Aber Leibniz hat offenbar keine Not mit diesem verschlüsselten Text und antwortet umgehend, er sehe gewisse Übereinstimmungen mit seiner eigenen Lösung, aber auch kleine Abweichungen.

Catena vel Funicularia: Die Renaissance des Kettenproblems

Im Jahre 1690 erlangt das Problem der Kettenlinie neue Aktualität.

Den Anstoß dazu gibt Jacob Bernoulli, der älteste einer ganzen Dynastie von hochbegabten Schweizer Mathematikern, durch eine Notiz in einem der ersten wissenschaftlichen Journale Europas, den **Acta Eruditorum Lipsiensia** (oder **Lipsiae**), was man etwas respektlos mit »Leipziger Allerlei der Gelehrten« übersetzen könnte. Huygens schlägt dem Mitherausgeber Leibniz vor, die Schlagkraft seines neuen Infinitesimalkalküls an diesem Problem zu demonstrieren, und sendet ihm die oben erwähnte chiffrierte Lösung zu, damit man dann beide Lösungen vergleichen könne. Leibniz entschließt sich, in einer Art Preisausschreiben erneut zur Lösung des Problems aufzurufen (wohl um den Interessentenkreis zu erweitern, aber im Bewusstsein, wie Huygens schon eine Lösung parat zu haben).

Damals wie heute ist die Reaktion auf eine so anspruchsvolle Denksportolympiade eher dürftig. Die einzige bis zum Einsendeschluss eingegangene Lösung (außer der von Huygens) kommt von dem jüngeren Bruder Jacob Bernoullis, Johann. In seiner **Solutio Problematis Funicularis** (dazu Leibniz: »**Catenula** schicket sich besser als **funis** [Seil], weilen **funis** sich extendiren kann, **catena** aber ihre länge beständig behält«) legt er zwei Konstruktionen der Kettenlinie vor und zählt eine ganze Reihe erstaunlicher Eigenschaften dieser Kurve auf – freilich ohne die Lösungswege preiszugeben; stattdessen konfrontiert er den Leser mit lakonischen Bemerkungen wie: »**Dico punctum E esse in Curva Funicularia**« (»Ich behaupte, dass der Punkt E auf der Kettenlinie liegt«). Kein Wort über den physikalischen Hintergrund, geschweige denn eine Erläuterung, warum die angegebene Konstruktion zum Ziel führt.

Während Huygens sich in seiner »Lösung« auf die Präsentation einiger Spezialfälle »zur Vermeidung großer Ausführlichkeit« beschränkt und stattdessen auf seinen »unter Verschluss« an Leibniz mitgeteilten codierten Text hinweist (»involucro quodam obtectas deposui«), leistet sich Bernoulli die fast ironisch klingende Formulierung: »… demonstrationem omitto, ne Celeberrimo Viro primae inventionis palmam vel praeripiam, vel inventa sua super hac materia plane supprimendi ansam praebeam«: er »lasse den Beweis weg, um dem hochberühmten Herrn [Leibniz] weder die Siegespalme der Erstentdeckung zu entreißen noch ihn zu veranlassen, seine einschlägigen Resultate zurückzuhalten« – eine skurrile Mischung aus Höflichkeit und Vorsicht. Wie allerdings aus dem Briefwechsel hervorgeht, waren sich die drei Autoren ziemlich einig und im Klaren über die Gemeinsamkeiten und Unterschiede ihrer Methoden und Resultate – den Rest der Welt ließen sie sicherheitshalber über die Details im Dunklen.

Analysis Problematis Catenariae: Die Lösung

Angesichts der Geheimniskrämerei der damaligen Zeit dürfen wir es als einen Glücksfall der Wissenschaftsgeschichte betrachten, dass Leibniz in Florenz die Bekanntschaft Rudolf Christian von Bodenhausens gemacht hatte, der als Abt und Erzieher am toskanischen Hof sich so sehr für die Mathematik und insbesondere die Errungenschaften von Leibniz begeisterte, dass dieser von seiner üblichen Verschleierungstaktik abwich und dem Freund vertraulich seine Ideen explizierte (»… welches M. Herrn ins Ohr sage«).

So verfasste er für ihn eine ungewöhnlich ausführliche Darstellung des Kettenproblems und seiner Lösung, weshalb die »Analysis der Kettenlinie« heute zu den wenigen mathematischen Kleinodien gehört, von denen ein Original von Leibniz erhalten ist. Doch schon warnt er wieder: »Es ist aber guth, dass wenn man etwas würcklich exhibiret, man entweder keine demonstration gebe, oder eine solche, dadurch sie uns nicht hinter die schliche kommen.« Dann schlägt er vor: »Die curvam catenariam zu suchen, … und wenn man lange den saxum Sisyphi volviret [den Sisyphusfelsen gewälzt hat], … die analysis uns via regia infallibili [auf dem untrüglichen Königsweg!] ad exitum führen oder impossibilitatem demonstriren muss, und gleichsam ein filum [Faden] in Labyrintho giebt.«

Hinter dieser Passage stehen Leibniz' Maximen: Einfachheit, Klarheit, Allgemeinheit. Wie Leibniz als erster erkannte, ist die Kettenlinie schlicht das arithmetische Mittel aus einer Exponentialfunktion und deren Spiegelung an der vertikalen Achse.

Bei geeignetem Maßstab wird die Kurve durch folgende Formel beschrieben:

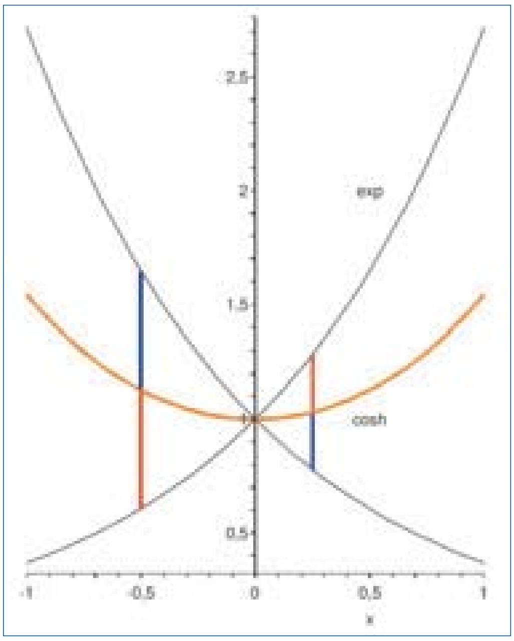
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

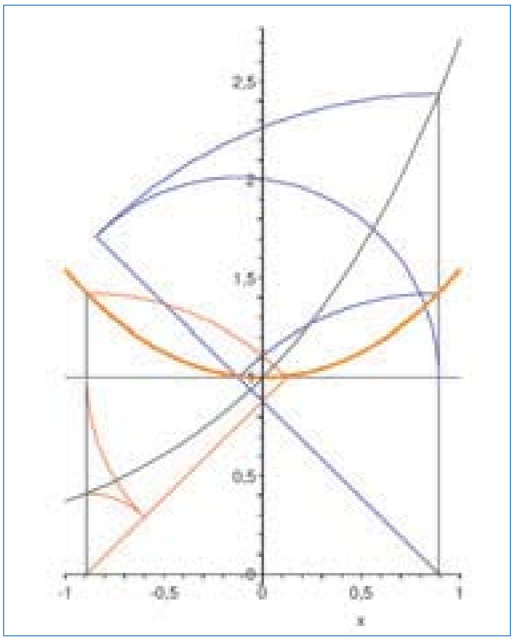
wobei Leibniz für die Zahl e, die Basis des natürlichen Logarithmus, den guten Näherungswert 2.7182818 angibt.

Diese spezielle Kettenlinie erhielt wegen der großen Ähnlichkeit (sowie der zahlreichen von Leibniz bemerkten Analogien) zum **Cosinus** den Namen **Cosinus hyperbolicus**, ist aber weder eine Parabel noch eine Hyperbel! Was sie mit dieser zu tun hat, werden wir noch sehen.

Leibniz bringt es auf den Punkt, was Huygens nicht erkannt hatte: »Hiebey schicke die solutionem des problematis Galilaei circa veram figurem Catenae vel Funis pendentis, welche mir umb viel desto mehr gefallen, dass sie uns die logarithmos gibt, also dass man mit einer subtilen kette alle problemata per logarithmos expedienda praestiren köndte… Dieses aber de logarithmis sage ich andern noch nicht!«

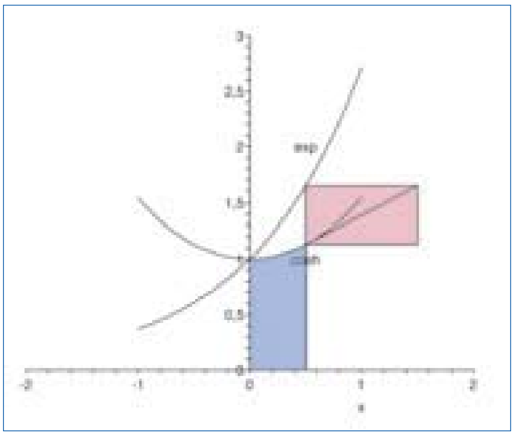
Leibniz' Herleitung der fundamentalen Differentialgleichung der Kettenlinie aus den physikalischen Gegebenheiten, welche im Wesentlichen besagt, dass die Steigung der Kurve proportional zu ihrer Länge ist, erscheint im Vergleich zur heute üblichen Argumentation über Gleichgewichtsbedingungen etwas umständlich, hat aber durch die Einbeziehung von Momenten und Schwerpunkten ihren Reiz.

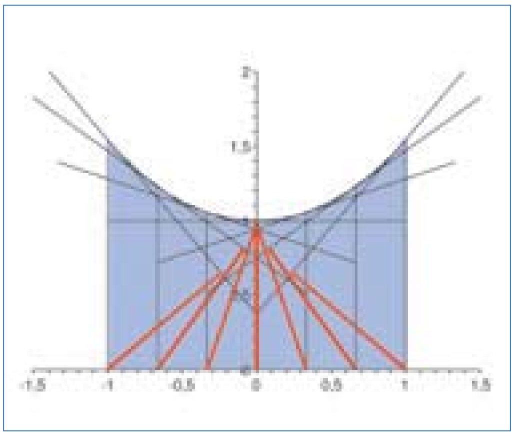




Figur 3 (links)
Kettenlinie als Mittelung zueinander symmetrischer Exponentialfunktionen

Figur 4 (rechts)
Konstruktion der Exponentialkurve aus der Kettenlinie





Figur 5 (links)
Exponentialfunktion als Summe der Kettenlinie und ihrer Ableitung

Figur 6 (rechts)
Kettenlinie und Tangente

Ob die erwähnte »Fadenkonstruktion« von praktischem Wert ist, sei dahingestellt – hübsch ist sie auf jeden Fall aus geometrischer Sicht.

Wir geben sie etwas vereinfacht und modernisiert wieder.

Leibniz findet, dass »die curva catenaria sehr notable proprietates habe«.

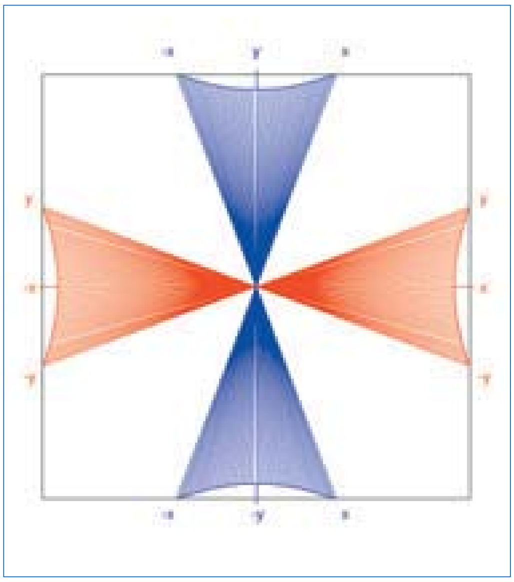
Einige dieser bemerkenswerten (und charakteristischen) Eigenschaften seien hier kurz genannt:

Die Steigung einer Kettenlinie ist proportional (im Falle des Cosinus hyperbolicus sogar gleich)

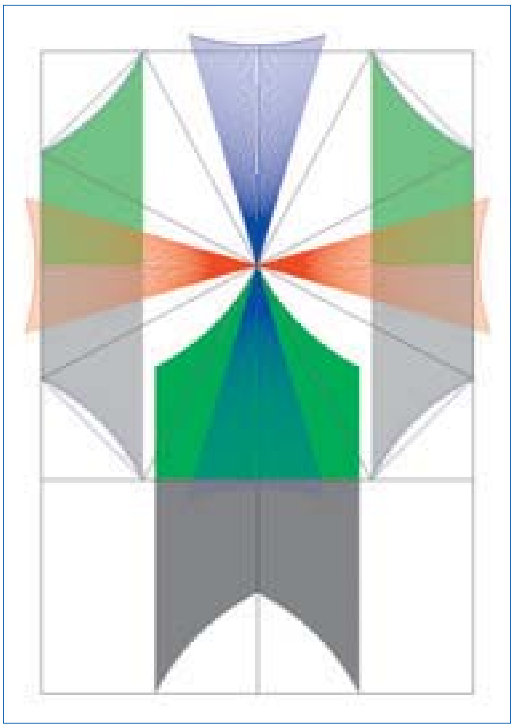
1. der Länge der Kurve vom tiefsten bis zu dem Punkt, in dem die Steigung gemessen wird,
2. der Fläche zwischen diesem Kurvenstück und der waagerechten Koordinatenachse,
3. der Fläche des Rechtecks mit der Kurventangente als Seite und dem Lot vom Kurvenpunkt auf die x-Achse als Diagonale. Der Abstand der Tangente zum Lotfußpunkt ist dabei konstant.

Seinen Gegnern verpasst Leibniz einen Schuss vor den Bug: »Diejenigen so Analysin novam verachten und vor ein giocolino [Spielzeug] halten, können ihr heil an diesem problemate versuchen … aber ipsam solutionem zu finden, soll einer wohl bleiben lassen, der nicht meinen oder aequivalenten calculum hat.«

Figur 7
Der Kampf mit den Windmühlenflügeln



Figur 8
Windmühlenflügel der Hyperbeln



Figur 9 (rechts)
Die Flügel des Windrades haben die gleiche Gesamtfläche wie die Gebäudefront!

Leibniz schließt: »… haec curva est una ex virtuosissimis totius Geometriae und über dieses summae in construendo facilitatis [eine der virtuosesten Kurven und höchst einfach zu konstruieren], wenn man nur einen faden (sic!) hat, der sich sufficienti facilitate bieget … und nicht notabiliter dehnet.«

Für den Fachmann fügt er hinzu, er habe nicht nur Bogenlänge und Flächeninhalt gefunden, sondern auch Kurven- und Flächenschwerpunkt »… und zwar alles durch sehr kurtze constructiones.«

Nach dem Erscheinen einer weiteren Abhandlung über die Kettenlinie im Giornale de' Letterati (Modena) verbreitet sich der mathematische Ruf des G.G.L.L. schnell in ganz Europa, so dass man bald allerorten ehrerbietig von dem **Viro Clarissimo Leibnitio** spricht.

Area Cosinus Hyperbolicus: Umgedreht und umgekehrt

In einem lateinisch verfassten Brief von Leibniz an Heinrich Oldenburg, den damaligen Sekretär der Royal Society in London, datiert 27. August 1676, lesen wir (in freier Übersetzung): »… Meine Methode ist nur ein Korollar der allgemeinen Lehre der Transformationen, mit deren Hilfe eine beliebige Figur … in eine andere analytische, flächengleiche transformiert wird.«

Damit befindet sich Leibniz bewusst in der klassischen Tradition von Archimedes bis Cavalieri.

Wir wollen hier, inspiriert durch den Kampf des Idealisten mit den Windmühlen, die Idee der Flächentransformationen an einem Beispiel demonstrieren, das uns zu einem weiteren Geniestreich von Leibniz und von da aus wieder zur Kettenlinie führen wird. Wir betrachten die zwei Hyperbeln

$$y^2 - x^2 = \pm 1$$

und schneiden vom Zentrum aus symmetrische Sektoren ab.

Es entsteht ein Windrad mit vier Flügeln.

Wir möchten die Fläche eines Windmühlenflügels bestimmen. Ein kleiner Trick vereinfacht die Situation erheblich: Wir drehen das Windrad um einen Achtelkreis. Wie eine elementargeometrische Skizze bestätigt, erfüllen die neuen Hyperbeln die Gleichungen

$$2xy = \pm 1.$$

Und nun kommt die Archimedisch-Leibnizsche Idee der flächengleichen Figuren zum Tragen: Durch Verschiebung geeigneter rechtwinkliger Dreiecke sieht man, dass der jeweilige Sektor dem annähernd trapezförmigen »senkrechten Schatten« des entsprechenden Hyperbelstücks flächengleich ist.

Und wie groß ist die Fläche eines Flügels, ausgedrückt durch die Koordinaten der Endpunkte?

Leibniz' Antwort basiert auf der zu seiner Zeit bereits bekannten Tatsache, dass der natürliche Logarithmus den Flächeninhalt unter der Hyperbel $y = 1/x$ zwischen 1 und a angibt.

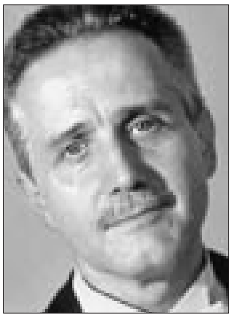
Sind nun $\pm x$ und $\pm y$ die Koordinaten der Sektorenendpunkte der ursprünglich horizontal-vertikalen Flügel, so ergeben sich für die gedrehten Flügel die durch ihre Einfachheit bestechenden Flächenformeln

$$F = \ln(x + y),$$
$$x = \cosh(F),$$
$$y = \sinh(F).$$

Die in moderner Software benutzten Bezeichnungen arcsinh und arccosh statt Arsinh und Arcosh für die Umkehrfunktionen, die irreführend auf Bogenlängen statt auf Flächeninhalte (Areale!) hindeuten, wären dem Wahrheitssucher Leibniz ein Gräuel gewesen!

Literatur

- C.I. Gerhardt, Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern. Mayer & Müller, Berlin 1899. Neudruck: Georg Olms Verlag, Hildesheim 1987.
- G.W. Leibniz, Mathematische Schriften, herausgegeben von C.I. Gerhardt, Band VII. Georg Olms Verlag, Hildesheim 1971.
- Eike Christian Hirsch, Der berühmte Herr Leibniz. Verlag C.H. Beck, München 2000.



Prof. Dr. Marcel Erné
Jahrgang 1947, ist seit 1989 Professor für Mathematik am Fachbereich Mathematik, seit 2005 am Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik der Fakultät für Mathematik und Physik.

Animationen der Illustrationen und weitere Grafiken zur Kettenlinie findet man auf der Website:

- http://www.iazd.uni-hannover.de/~erne/catenaria/