Calculemus!

NEUE HANNOVERSCHE FUNKTIONSMODELLE ZU DEN RECHENMASCHINEN VON LEIBNIZ

Die Erfindung der ersten dezimalen Rechenmaschine für alle vier Grundrechenarten gehört zu Leibniz' größten Leistungen. Durch die Dresdener Nachbauten von Nikolaus J. Lehmann in den 1980ern und unsere jüngste Forschung in Verbindung mit Nachbauten (2005) wurden grundlegend neue Erkenntnisse erzielt. Auch für die von Leibniz beschriebene und durch Ludolf von Mackensen in München erstmals konstruierte binäre Rechenmaschine (1971) wurden von Erwin Stein und Gerhard Weber unter Mitwirkung von Franz Otto Kopp in einer Neukonstruktion wesentliche Verbesserungen erreicht (2004).

1. Die Vier-Spezies-Rechenmaschinen von Leibniz und ihre Probleme

Die Rechenmaschine von Wilhelm Schickard (1623) für Multiplizieren und Dividieren, die verloren ging, und die Addier- und Subtrahiermaschine von Blaise Pascal (1644) kannte Leibniz nicht, als er noch in Mainz 1670/71 mit der Konstruktion einer neuartigen dezimalen Vier-Spezies-Rechenmaschine (für alle vier Grundrechenarten) begann, sie ab 1672 während seines an Entdeckungen und Erfindungen reichen Paris-Aufenthaltes weiterentwickelte, dort in einer Uhrmacher-Werkstatt 4/7/3-stellig bauen ließ und 1673 der Royal Society London – leider nicht funktionstüchtig – vorstellte [1, 2]. Sie hatte Sprossenräder für die Zahleneingabe mit radial nach außen verschiebbaren Klinken, die das jeweilige Aufnahmezahnrad erfassen.

Die ab 1682 entwickelten und seit 1693 gebauten neuen großen 8/16/1-stelligen Maschinen haben Staffelwalzen anstelle von Sprossenrädern, die unter dem Aufnahmezahnrad axial verschoben werden. Eine Staffelwalze hat für die Ziffern 1 bis 9 neun Zähne mit abnehmenden Zahnlängen auf dem halben Umfang (180°).

Diese geniale bis ins 20. Jahrhundert maßgebende Erfindung ist das Produkt logisch-abstrakter Denkprozesse, die technische Komplexität trotz großer Ausführungsprobleme nicht scheute, um alle vier Grundrechenarten systematisch mit gleichartigen und einfach mechanisch auszuführenden Algorithmen zu ermöglichen.

Dies gelang ihm durch die Aufteilung in zwei Hauptbaugruppen: das in einem Schlitten angeordnete und durch eine Transportkurbel axial verschiebbare 8-stellige Eingabewerk mit der Rechenkurbel (Magna-Rota-Kurbel, MRK) und das 16-stellige Resultatwerk für Addition und Subtraktion mit den erforderlichen Zehnerüberträgen; Multiplikation und Division erfolgen durch wiederholte Addition und Subtraktion in verschiedenen Schlittenstellungen, Bilder 1a und 1b.

Neben den logisch verwandten Sprossenrädern und Staffelwalzen stellen die zweistufigen Zehnerüberträge den genialen Kern der Maschine dar, Bilder 2a und 2b.

Als ersten Schritt des Zehnerübertrags dreht der Einzahn auf der Welle des Aufnahmezahnrades das fünfzähnige Muldenrad um 18°. Hierdurch gerät das auf derselben Welle sitzende – jedoch um 18° voreilende – Fünfhorn in den Flugkreis eines Zweihorns. Die Zweihörner sind zwischen den Staffelwalzen angeordnet und werden von diesen durch die MRK primär angetrieben. Beim Weiterdrehen der MRK bis 360° nimmt dann das Zweihorn das entsprechende Fünfhorn um 360°/5–18° = 54° mit. Hierdurch dreht sich auch das Muldenrad um weitere 54° und nimmt – als eigentlichen Zehnerübertrag – das Zählrad der nächst höheren (linken) Stelle um einen Winkel von lediglich 21,5° mit, der eigentlich 36° sein sollte, Bild 2b.

Um dies zu erreichen, verwendete Leibniz Federrasten auf den Zählrädern und den Rastkerbenrädern (auf den Wellen der Muldenräder und Fünfhörner befindlich), die durch Flankendrücke auf die Zahnflanken Differenzdrehungen von 36°– 21,5° = 14,5° erzwingen, wobei die Rollen in den Rasten verharren.

Außerdem hat Leibniz auf der Rückseite der Maschine Pentagone (fünfeckige Scheiben) auf den verlängerten Wellen der Muldenräder einbauen lassen, deren obere Seiten bei Rechenbeginn horizontal zu stehen haben. Leibniz' Sekretär Johann Georg Eckhart schrieb am 1. Dezember 1699 an ihn: »*Adam läßet Ihre Exc. bitten ihm zu berichten, ob die kleinen wellbäume woran die fünfeckichten räder (die Pentagone) komme, an welchen man sehen kann ob das werk recht außgeführet oder nicht, sollten länger gemacht werden*«.

Offensichtlich hatte Leibniz also erkannt, dass die Nicht-Vollendung von Zehnerüberträgen (nach vollen Umdrehungen der MRK) an Schrägstellungen der Pentagone zu ersehen ist.

Die folgenden Bilder 1a und 1b zeigen Leibniz' letzte und einzig erhalten gebliebene »große« Vier-Spezies-Maschine aus dem Besitz der GWLB Hannover.

Wie am – nahezu – authentischen, aber mit feineren Toleranzen gefertigten Nachbau als im Original durch Klaus Badur und Wolfgang Rottstedt, Garbsen, lassen sich nicht vollendete Zehnerüberträge nachträglich korrigieren, indem man nach Durchführung der jeweiligen Additionen oder Subtraktionen die eingegebene Zahl (Multiplikator oder Divisor) auf Null stellt und dann – sozusagen im Leerlauf – so viele volle MRK-Umdrehungen durchführt, bis alle schräg stehenden Pentagone wieder horizontal stehen [3].

Mit diesem eindeutig erweiterten mechanischen Algorithmus rechnet die Leibniz-Maschine mit acht Eingabestellen im gesamten verfügbaren Zahlenbereich richtig. Fraglich ist, ob Leibniz die oben geschilderte Alternative eines erweiterten Algorithmus bekannt war.

Von grundlegender Bedeutung für den zweistufigen Zehnerübertrag sind die Spreizwinkel der Zweihörner. Unsere Messungen vom Januar 2004 ergaben als Spreizwinkel für die acht Zweihörner der Originalmaschine Werte zwischen 86° und 94°, also im Durchschnitt 90°.

2. Die Dresdener Nachbauten von Nikolaus J. Lehmann

Nikolaus Joachim Lehmann ließ in den 1980er Jahren an der TU Dresden drei möglichst authentische Nachbauten der »großen« Rechenmaschine von Leibniz fertigen. Sein Ziel war es, vollständige Zehnerüberträge durch von rechts nach links abnehmende Spreizwinkel der Zweihörner, von +132° bis –135°, mit ungleichen Differenzwinkeln zwischen 30° und 33° im regulären Rechenablauf zu verwirklichen [4, 5].

Nach unseren Untersuchungen reicht dies jedoch nicht aus, um alle Zehnerüberträge richtig durchzuführen. An einem der Nachbauten von Lehmann konnte gezeigt werden, dass bei der Addition 999.999 + 1 nur die vier rechten »Neunen« übertragen werden, nicht jedoch die zwei weiteren. Dies wird – wie von Leibniz erkannt – durch schräg stehende Pentagonscheiben angezeigt. Damit ist auch bei den Nachbauten von Lehmann ein Weiterdrehen der Magna-Rota-Kurbel erforderlich. Die vollständigen Zusammenhänge wurden von uns im Hannoverschen Nachbau (2005) analytisch, numerisch und konstruktiv geklärt.

3. Der Hannoversche Nachbau von Professor Popp†, Professor Stein und Dr. Kopp

Mit Hilfe eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft von 2003 bis 2005 geförderten Forschungsprojekts von Professor Popp† und Professor Stein wurde für unsere Leibniz-Ausstellung ein so weit wie möglich authentisches 6/12/1-stelliges Funktionsmodell der Leibniz-Maschine, Bild 3, jedoch – wie bei Lehmann – mit abnehmenden aber optimierten Zweihornwinkeln, und zwar mit doppelten Abständen der Staffelwalzen, sowie Großmodelle der Staffelwalze und des Zehnerübertrags im Maßstab 8:1 an den Instituten für Mechanik und für Getriebetechnik gebaut [6, 7, 8].

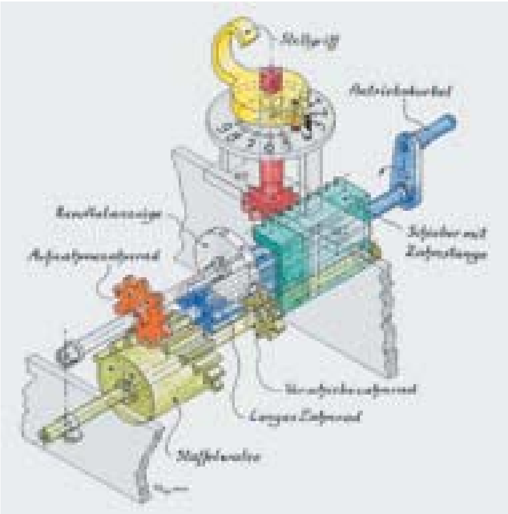
Hierin wurden zahlreiche Sicherungsanforderungen realisiert, die Beschädigungen während der Ausstellungen verhindern. Der Konstrukteur war Dr. Kopp.

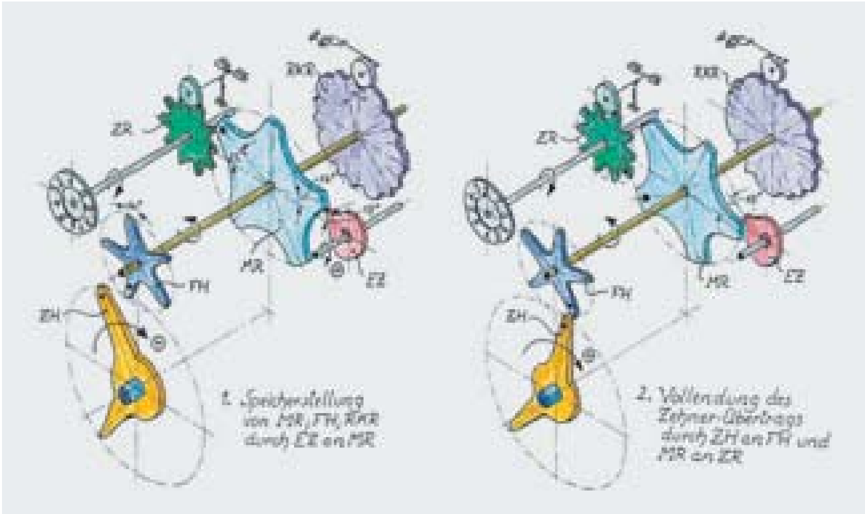
Ein wichtiges Ergebnis unserer Forschung ist, dass ein nach 360°-Drehung der MRK nicht vollständig durchgeführter Zehnerübertrag (angezeigt

Bilder 1a, 1b
Fotos der letzten großen Vier-Spezies-Rechenmaschine von Leibniz, gebaut ~1700 bis 1716

1a (links)
Ansicht von oben

1b (rechts)
Ansicht von unten





Bilder 2a, 2b
Perspektivische Darstellungen von Zahleneingabe und Zehnerübertragung

2a (links)
Zahleneingabe mittels Staffelwalze

2b (rechts)
Zehnerübertragung der Rechenmaschine von Leibniz

durch eine schräg stehende Pentagonscheibe) durch Weiterdrehung der MRK um den Winkel 85° korrekt beendet wird, ohne dass die Eingabezahl auf Null zu stellen ist.

Die erforderliche Weiterdrehung zur Vollendung des Zehnerübertrags beträgt 84,7°, und die zulässige Weiterdrehung vor Beginn einer neuen Addition oder Subtraktion ist 87°, so dass ein positiver Differenzwinkel von 2,3° die Vollendung des Zehnerübertrags erlaubt. Der entsprechende Differenzwinkel in der Konstruktion von Lehmann beträgt –2,5°, so dass dort die Korrektur theoretisch nicht möglich ist.

Dies ist darin begründet, dass in den Maschinen von Leibniz und Lehmann die Zähne der Staffelwalzen auf dem halben Umfang (180°) angeordnet sind, während in unserem Modell eine notwendige Reduktion auf 168° erfolgte.

4. Mathematische Optimierung des Zehnerübertrags im Hannoverschen Modell

Anhand unserer vollständigen analytischen Beschreibung der Kinematik der Leibnizschen Maschine [8] im Rahmen der ebenen Trigonometrie erfolgte deren mathematische Mehrziel-Optimierung.

Es sind fünf Gleichheits- und sechs Ungleichheitsnebenbedingungen zu erfüllen.

Die acht Entwurfsvariablen sind: die Radien der Muldenräder, Einzähne, Fünfhörner, Zweihörner und Zählräder sowie die Drehwinkel der Muldenräder und Zählräder und der maximale halbe Zweihorn-Spreizwinkel.

Die quadratische Zielfunktion enthält die drei Ziele: Muldenraddrehung durch Einzahn nahe bei 18°, Zählraddrehung durch Fünfhorn (und Muldenrad) nahe bei 36° und halber Zweihorn-Spreizwinkel möglichst nahe bei 90°.

Das übergeordnete Optimierungsziel, die maximal zulässige Stellenzahl des Eingabewerks, ist hieraus ermittelbar.

Hierzu wurde eine exakte l_1-Penalty-Funktion mit Hilfe eines genetischen Algorithmus' und nachgeschaltetem Abstiegsverfahren verwendet.

Das Hannoversche Modell kommt mit dem Zählraddrehwinkel von 31,55° dem Ziel von 36° am nächsten. Jedoch wird damit nicht der größtmögliche Zweihorn-Spreizwinkel von 146,64° erreicht, sondern nur 137,32°, was für acht Eingabestellen ausreichend ist.

Die maximale Zahl von Eingabestellen für die Konstruktion von Leibniz ergibt sich hieraus mit einer Integeroptimierung zu acht.

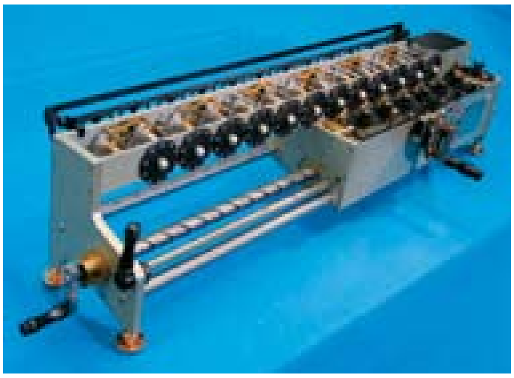


Bild 3 (links)
Hannoversches Modell 2005 der Vier-Spezies-Rechenmaschine von Leibniz mit doppelten Staffelwalzen-Abständen, sechs Eingabe- und zwölf Resultatstellen, sowie konstruktiven Optimierungen
K. Popp†, E. Stein und F. O. Kopp (2005)

Bild 4 (rechts)
Hannoversches Modell 2004 der 7/12/5-stelligen binären Rechenmaschine für Addition und Multiplikation nach der Beschreibung von G. W. Leibniz von 1679
E. Stein und G. Weber (2003/04)

5. Das Hannoversche Modell der dyadischen Rechenmaschine von Leibniz

Leibniz beschrieb 1679 handschriftlich in dem lateinischen Text »De progressione dyadica« eine mit den binären Zahlen 0 und 1 arbeitende Rechenmaschine für Addition und Multiplikation, die »Machina Arithmeticae Dyadicae«.

Anstelle eines Getriebes – wie bei der dezimalen Vier-Spezies-Maschine – rollen hierin kleine Metallkugeln infolge der Schwerkraft auf einer doppeltschiefen Ebene aus dem nach vorne verschobenen Schlitten (der »Büchse«) mit dem binären Eingabewerk in das feststehende Rechen- und Ergebniswerk mit den Zweierüberträgen als wichtigsten Konstruktionselementen.

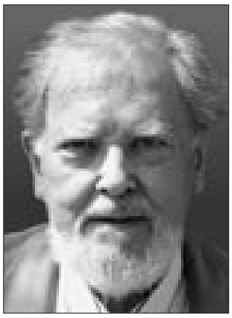
Diese Maschine hat also die gleichen beiden Hauptbaugruppen wie die dezimale Getriebemaschine.

Ludolf von Mackensen übersetzte 1968 den lateinischen Text und entwarf eine 7/12/5-stellige binäre Rechenmaschine, die 1971 vom Deutschen Museum München gebaut wurde.

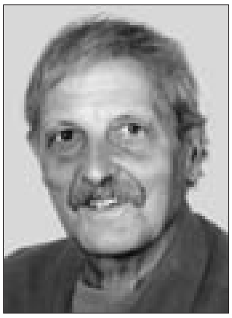
Im Zweierübertrag rollt eine zweite, nachrollende Kugel über ein Auslöseplättchen und gibt die erste Kugel aus dem Rechenwerk frei. Die zweite Kugel wird von einer Zunge mit geringerer Neigung in die nächste linke Resultatstelle geleitet. Diese empfindliche Bauweise führt zu zufälligen Fehlern. Außerdem kann es während des Ablaufs der Kugeln aus dem Einstellwerk zu Staus kommen.

Im Neubau des erstgenannten Autors und Gerhard Webers (2004) mit Acrylgehäuse wurden statt der Zungen winkelförmige Fangarme mit Drehfedern und Anschlägen verwendet, welche die Kugeln sicher umleiten. Außerdem wurden die Neigungswinkel der schiefen Ebene optimiert, Bilder 4, 5a und 5b. Die Maschine addiert und multipliziert im gesamten verfügbaren Zahlenbereich richtig.

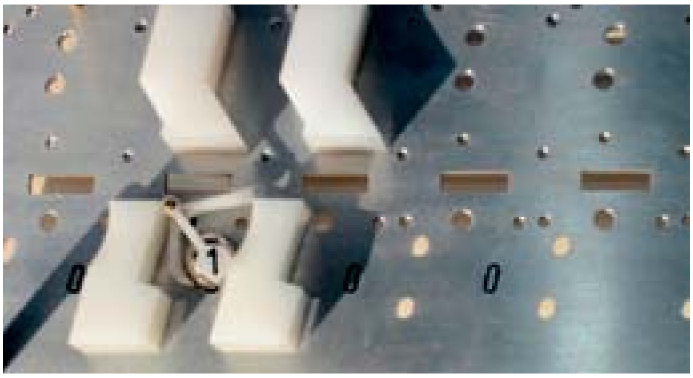
Vom logischen Prinzip her kann die von Leibniz beschriebene Binär-Maschine als Vorläufer der heutigen binär rechnenden Computer angesehen werden, deren erste mechanische Ausführung – die Zuse Z1 – 1936 von Konrad Zuse gebaut und patentiert wurde.

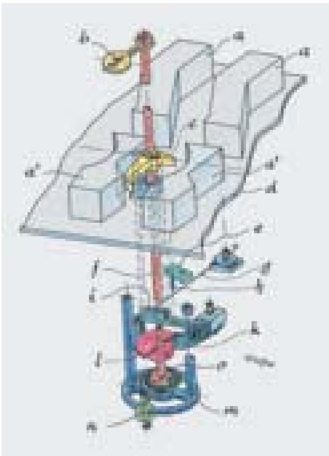


Univ.-Prof. em. Dr.-Ing. habil. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. mult. Erwin Stein
Jahrgang 1931, war von 1971 bis 1978 Ordinarius des Lehrstuhls für Baumechanik und von 1978 bis 1998 Leiter des Instituts für Baumechanik und Numerische Mechanik. Zwischen 1990 und 2006 konzipierte und organisierte er acht Leibniz-Ausstellungen.



Dr.-Ing. Franz Otto Kopp
Jahrgang 1937, war bis 2002 Oberingenieur am Institut für Getriebetechnik und ist seit 1976 Dozent am Fachbereich Design und Medien, FH Hannover.





Bilder 5a, 5b
Neukonstruktion des Zweierübertrags der binären Rechenmaschine nach Leibniz

5a (links)
Fanghaken und eingeschwenktes Fähnchen über einer Kugel im Resultatwerk

5b (rechts)
Kugelführung vom Eingabewerk aus sowie Welle des Zweierübertrags mit Fanghaken, Rückstelldrehfeder und Anschlägen

Literatur

1 L. von Mackensen: »Zur Vorgeschichte und Entstehung der ersten digitalen 4-Spezies-Rechenmaschine von Gottfried Wilhelm Leibniz«, in: Studia Leibnitiana Suppl. 2, S. 34–68, Wiesbaden, 1969

2 L. von Mackensen: »Die ersten dekadischen und dualen Rechenmaschinen«, in: K. Popp, E. Stein (Hrsg.) »G. W. Leibniz, Philosoph, Mathematiker, Physiker, Techniker«, Begleitbuch zur Leibniz-Ausstellung, Schlütersche 2000, S. 85–107

3 K. Badur: »Neue Erkenntnisse zur Rechengenauigkeit der Leibniz Rechenmaschine. Erfahrungen mit einem originalgetreuen Nachbau«, in: VIII. Internationaler Leibniz-Kongress, Vorträge 1. Teil, S. 16–23, Hannover, 2006

4 N. J. Lehmann: »Neue Erfahrungen zur Funktionsfähigkeit von Leibniz' Rechenmaschine«, in: Studia Leibnitiana, Band XXV/2, 1993, S. 174–188

5 N. J. Lehmann: »Leibniz als Erfinder und Konstrukteur von Rechenmaschinen«, in: Wissenschaft und Weltgestaltung, Abh. Internat. Symp. der Sächs. Akademie der Wissenschaften 1996, K. Nowak und H. Poser (Hrsg.), Olms Verlag Hildesheim, 1999

6 E. Stein: »Gottfried Wilhelm Leibniz, seiner Zeit weit voraus ...«, in: Abh. der BWG 54 (2005), S. 131–171

7 E. Stein, F. O. Kopp, K. Wiechmann und G. Weber: »Neue Forschungsergebnisse und Nachbauten zur Vier-Spezies-Rechenmaschine und zur Dyadischen Rechenmaschine nach Leibniz«, in: VIII. Internat. Leibniz-Kongress, Vorträge 2. Teil, S. 1018–1025, Hannover, 2006

8 F. O. Kopp und E. Stein: »Konstruktive Verbesserungen im Hannoverschen Modell der Leibnizschen Vier-Spezies-Rechenmaschine«, in: VIII. Internat. Leibniz-Kongress, Vorträge 1. Teil, S. 390–397, Hannover, 2006