Frühe Einsichten

DIE ENTWICKLUNG DES MATHEMATISCHEN DENKENS BEI KINDERN

Mit großer Freude, spontan und unbemerkt von den Erwachsenen, oder auch angeleitet entwickeln schon kleine Kinder Einsichten in mathematische Zusammenhänge. Es geht nicht um das Lernen von Fakten, sondern das Verstehen von Mustern, Strukturen, Zusammenhängen und Beziehungen. Ein Wissenschaftler des Instituts für Didaktik der Mathematik und Physik der Leibniz Universität Hannover zeigt die mathematische Welt der Kinder.

Abbildung 1
Mathematisches Denken beginnt mit dem Entdecken von Mustern, Strukturen und Zusammenhängen – und natürlich mit Zahlen.
Quelle: Pixelio

Als der große Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) noch ein kleiner Junge war, unterrichtete sein Lehrer Büttner, wie damals üblich, alle Kinder der ersten Schuljahre gemeinsam. Eines Tages sollten die Kinder aus Gauß' Jahrgang die Zahlen von 1 bis 100 addieren. Der Lehrer glaubte sie damit eine Weile beschäftigt, um sich anderen Kindern widmen zu können. Doch schon nach kurzer Zeit rief Carl Friedrich: »Da ligget se!« – nämlich die Zahl, die Lösung 5050. Dem kleinen Gauß war das Addieren von 100 Zahlen zu langweilig, und er hatte sich deshalb etwas einfallen lassen: ein elegantes Verfahren, mit dem er die langwierige Prozedur auf wenige Rechenschritte verkürzen konnte.

Soweit die Anekdote vom »kleinen Gauß« (vgl. z. B. Colerus, 1951, S. 304; Michling, 1976, S. 9ff). Ob sich die Geschichte tatsächlich so zugetragen hat, wissen wir nicht. Was wir aber sehr genau wissen, ist, dass es auch heute viele Mädchen und Jungen gibt, die ähnlich wie der kleinen Gauß brillante Ideen und große Freude an der Beschäftigung mit mathematischen Fragestellungen haben. Nicht alle werden später große Mathematiker(innen) – und sie wollen es auch gar nicht werden. Das ist auch nicht wichtig. Wichtig ist, dass Kinder schon früh und mit großer Selbstverständlichkeit mathematische Einsichten entwickeln. Dabei geht es nicht um schnelles Rechnen (das Rechnen wollte der kleine Gauß ja gerade vermeiden), sondern um die Freude am Entdecken von Mustern, Strukturen, Zusammenhängen und Beziehungen. Entdeckungen solcher Art machen alle Kinder, manche spontan, andere benötigen Anleitung. Manche Einsichten haben die Kinder viel früher, als wir Erwachsenen glauben, bei anderen staunen wir, wie mühsam scheinbar Offensichtliches erfasst wird. In jedem Fall aber ist die Entwicklung des mathematischen Denkens Teil der allgemeinen Denkentwicklung; sie beginnt früh und endet nie. Einige Stufen und Aspekte der Entwicklung bei jüngeren Kindern sollen hier anhand von Beispielen und Beobachtungen angesprochen werden.

Erstaunlich schwer fällt den meisten Kindern die Entdeckung der Horizontale. Man kann dies bei einem kleinen Experiment erkennen: Gezeigt wird den Kindern eine Flasche, die zur Hälfte mit rot gefärbtem Wasser gefüllt ist, aber zunächst nur als Vergleichsobjekt auf dem Tisch steht. Die Kinder erhalten ein Blatt, auf dem eine Flasche in acht verschiedenen Positionen dargestellt ist (Abb. 2 und 3); sie werden gebeten, die aufrecht stehende Flasche so weit mit roter Farbe anzumalen, dass sie wie die Modellflasche mit »Himbeersaft« gefüllt ist. Anschließend soll auch bei den übrigen Flaschen auf dem Blatt der Stand des Saftes eingetragen werden. Zur Überprüfung wird die reale Flasche dann vor den Augen der Kinder in die entsprechenden Lagen gedreht. Die Abbildungen 2 und 3 zeigen, wie Kinder unterschiedlichen Alters den Wasserstand in der Flasche nach der Überprüfung gesehen haben.

Es ist immer wieder verblüffend zu beobachten, dass die

Kinder erst in relativ fortgeschrittenem Alter eine klare Vorstellung vom Wasserstand in einer geneigten Flasche bekommen. Typisch an der Darstellung in Abbildung 3 ist, dass den Kindern vor allem die Wasserstände in den »schrägen« Positionen Probleme bereiten. Erst mit etwa neun Jahren erkennen die Kinder die Horizontale von sich aus.

Weit verbreitet ist die Vorstellung, dass mathematische Einsicht ausschließlich aus Handlungen erwachsen könne. Der Mathematikunterricht, insbesondere der Anfangsunterricht, müsse deshalb »konkret« sein und von realen, den Kindern vertrauten Situationen ausgehen. Begründet wird diese Vorgehensweise »vom Konkreten zum Abstrakten« unter anderem mit dem Verweis auf Arbeiten des Entwicklungspsychologen Jean Piaget (1896 – 1980). Zu beachten ist jedoch, dass für den Abstraktionsprozess das *Reflektieren der Bedeutung* der Handlung entscheidend ist und nicht etwa die Handlung selbst. Auch gibt es eine Reihe von Hinweisen darauf, dass bei einer zu engen Handlungsorientierung im Unterricht genau die Kinder im Nachteil sind, die dadurch besonders gefördert werden sollen, nämlich die eher leistungsschwächeren (vgl. z. B. Gellert, 1999, S. 114/131; oder noch schärfer formuliert von Rowlands und Carson, 2002, S. 98: Sie bemerkten, dass ein Unterricht, der zu sehr auf die Alltagspraktiken der unterpriviligierten Kinder eingeht, Gefahr läuft, die sozialen Unterschiede zwischen den Kindern weiter zu zementieren).

Gray, Pitta und Tall kamen auf der Grundlage eigener Untersuchungen mit mathematischen Aufgaben bei Kindern in den ersten Schuljahren zu einer klaren Aussage:

»'Low achievers' tended to highlight the descripive qualities of the items in strongly personalised terms, ... there was a tendency to associate these items with a story in the sense that they were seen as pictures that required colour, detail and a realistic content. In contrast, 'high achievers' concentrated on the more abstract qualities within (the) series of items ... they could traverse at will a hierarchicial network of knowledge from which they abstracted these notions or representational features« (1997, S. 123).

Dies bedeutet auch, dass man die Kinder nicht nur – gemäß einer alten Pädagogenweisheit – da abholen muss, wo sie sind, sondern auch dorthin führen, wo sie noch nicht sind. Beispielsweise, um Vorstellungen von *Beziehungen zwischen Zahlen* zu erzeugen, mit Denkspielen der folgenden Art: »Ich denke mir zwei Zahlen, die eine ist um 5 größer als die andere. Welche Zahlen könnten das sein?« (Hasemann, 2007, S. 205).

Einige Beobachtungen aus Videostudien mit Kindern aus dem letzten Kindergartenjahr sollen zeigen, wie die mathematische Denkentwicklung verlaufen kann. Im Mittelpunkt der Betrachtungen steht dabei nicht das Faktenwissen, sondern die Art, wie Kinder Einsicht in mathematische Sachverhalte gewinnen.

Die Aufgabe in Abb. 4 ist sehr leicht, sie wird kurz vor Schulbeginn von über 80 Prozent der Kinder richtig gelöst; die Aufgabe in Abb. 5 immerhin von 43 Prozent. Bei der Aufgabe in Abb. 4 gibt es jedoch gewaltige Unterschiede in der Zeit, die die Kinder zur Lösung benötigen.

Viele verwenden zeitaufwändige Zählstrategien, während andere Kinder entweder das Muster des Würfelbildes erkennen (7 = 6 + 1) oder eine Zahlzerlegung vornehmen (7 = 3 + 3 + 1). Es gibt offensichtlich Kinder, die bereits vor dem Schulbeginn selbstständig so genannte heuristische Strategien entdecken. Das sind

2

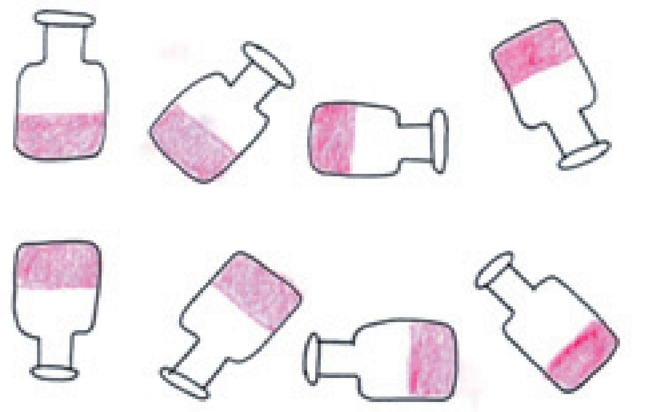


Abbildung 2
Die Entdeckung der Horizontalen: Ergebnis eines Kindes im Alter von 4 Jahren, 8 Monaten

3

Abbildung 3
Die Entdeckung der Horizontalen: Ergebnis eines Kindes im Alter von 7 Jahren, 5 Monaten

4

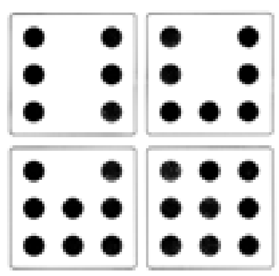


Abbildung 4
»Zeige auf den Kasten mit sieben Punkten«, lautet die Aufgabe für die Kinder.

Prof. Dr. Klaus Hasemann
Jahrgang 1944, ist geschäftsführender Leiter am Institut für Didaktik der Mathematik und Physik der Leibniz Universität Hannover.

Lösungsstrategien, bei denen die Kinder auf bekannte Muster und Kenntnisse zugreifen und sie in neuartigen Situationen flexibel einsetzen. Das Vorhandensein dieser Fähigkeit zeigt sich um so deutlicher je schwieriger eine Aufgabe ist. Die Aufgabe in Abb. 5 ist für viele Kindern (noch) nicht lösbar, weil sie eine ge-

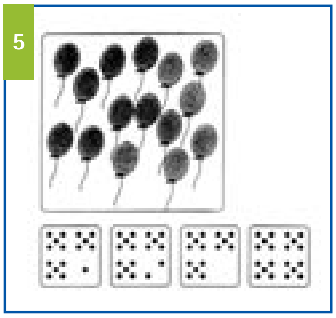


Abbildung 5
»Hier siehst du fünfzehn Luftballons. [Die Versuchsleiterin zeigt auf die Luftballons] Zeige auf den Kasten, in dem genau so viele Punkte sind wie hier Luftballons.«

schickte Organisation der Zählprozedur oder die Verwendung einer Rechenstrategie: 5 + 5 + 5 oder 3 x 5 (im Sinne von »drei Fünfen«) erfordert, beide Vorgehensweisen sind zu beobachten. Die meisten Kinder verlassen sich bei dieser Aufgabe jedoch noch ganz auf den optischen Eindruck und zeigen auf den Kasten mit den *meisten* Punkten (»weil der ganze Kasten voll ist« oder »weil hier am meisten drin sind«).

Geradezu verblüffend ist das Verhalten von Vorschulkindern, wenn man ihnen das Bild mit einer »großen Eins« und einer »kleinen Vier« vor-

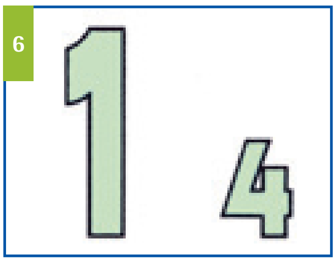
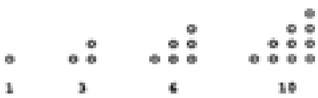


Abbildung 6
Welche Zahl ist größer: Die Eins oder die Vier?

legt (vgl. Abb. 6). Auf die Frage, welche Zahl die größere sei, nennen sie übereinstimmend die Eins. Die »Höhe« des Zahlzeichens ist also für die Kinder das wichtigste Entscheidungskriterium. Werden sie aber gefragt, was mehr ist, eins oder vier, wissen fast alle, dass vier mehr ist als eins. Bei dieser Aufgabe wird also von den Kindern die Frage nach der »größeren« Zahl auf das Zahlzeichen, die Frage nach dem »Mehr« aber auf die Anzahl, d. h. auf die *Bedeutung des Zeichens*, bezogen. Bereits Vorschulkinder sind durchaus in der Lage, an denselben Objekten Vergleiche unter verschiedenen Aspekten vorzunehmen und zwischen Zeichen und Bezeichnetem zu unterscheiden. Eine weitere Erkenntnis ist die, dass wir lernen müssen genauer zuzuhören – oder unsere Fragen genauer zu stellen: »größer« bedeutet für die Kinder in erster Linie »höher«, und nicht »mehr«.

Kommen wir noch einmal auf die Entdeckung des »kleinen Gauß« zurück. So – oder so ähnlich – wie diese Schülerin einer 4. Klasse bei Aufgabe b) hat auch Gauß seinen Lehrer verblüfft (Käpnick, 1998, S. 323):

Hier sind Kreise nach einer bestimmten Regel so angeordnet, dass Dreiecke entstehen:



a) Wie viele Kreise enthält die nächste Dreiecksanordnung?
Na, klar: 15.

b) Wie viele Kreise enthält die Dreiecksanordnung, die in der untersten Reihe aus 30 Kreisen besteht?

465 hab' ich gerechnet
30 29+1 28+2 sind immer 30 und das hab' ich zusammengezählt

c) Wie groß ist die Summe aller Zahlen von 1 bis 30? Begründe deine Lösung!

siehe Aufgabe b)

PS: Bei der Erprobung eines Tests zum Stand der Zahlbegriffsentwicklung am Schulbeginn haben wir auch die Unterschiede in den Fähigkeiten der Mädchen und Jungen betrachtet. Ergebnis: Es gibt keine.

Literatur

- Colerus, Egmont (1951): Von Pythagoras bis Hilbert. Wien: Paul Zsolnay Verlag.
- Gellert, U. (1999): Vorstellungen angehender Grundschullehrerinnen von Schülerorientierung. In: Journal für Mathematik-Didaktik 20, S. 113-137.
- Gray, E.; Pitta, D.; Tall, D. (1997): The nature of the object as an integral component of numerical processes. In: Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lahti (Finnland), vol. 1, S. 115-130.
- Hasemann, K. (2007): Anfangsunterricht Mathematik. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Käpnick, F. (1998): Mathematisch begabte Kinder. Frankfurt: Lang.
- Michling, H. (1976): Carl Friedrich Gauß. Aus dem Leben des princepts mathematicorum. Göttingen: Verlag Göttinger Tageblatt.
- Rowlands, S.; Carson, R. (2002): Where would formal, academic mathematics stand in a curriculum informed by ethnomathematics? A critical review of ethnomathematics. In: Educational Studies in Mathematics 50, S. 79-102.