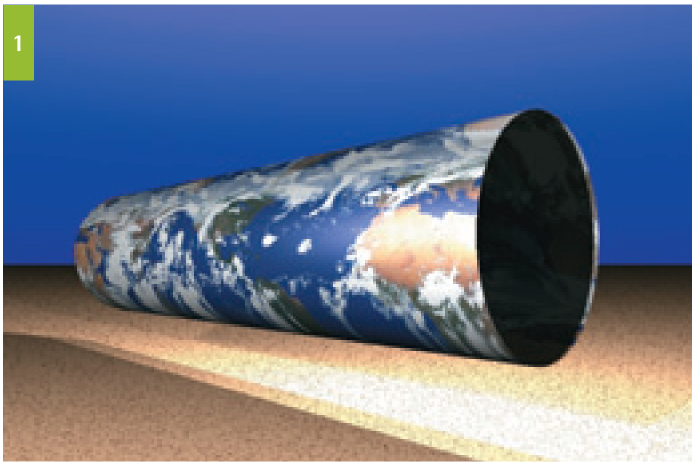
Epochemachendes Wirken

BERNHARD RIEMANN UND DIE RIEMANNSCHE GEOMETRIE

Die mathematischen Schriften des allzu kurzen Lebens Riemanns füllen nur einen bescheidenen Band, doch jede einzelne dieser Arbeiten war von so immenser Bedeutung für die Mathematik und Physik, dass wir heute nur noch ehrfurchtsvoll seine Werke bestaunen können. Ein Wissenschaftler vom Institut für Differentialgeometrie berichtet vom einflussreichen Leben und Denken dieses Mathematikers.

Kindheit und Jugend Riemanns


1

Bernhard Riemann, einer der bedeutendsten Mathematiker überhaupt, legt im Jahr 1854 mit seiner im Rahmen der Habilitation in Göttingen gehaltenen Probevorlesung »Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen« das Fundament für einen der wichtigsten Zweige mathematischer Forschung – für die heute nach ihm benannte »Riemannsche Geometrie«. Dieser auf den ersten Blick unscheinbare Vortrag, der keinerlei mathematische Formeln enthielt, revolutionierte nicht nur die Geometrie und führte zur Entwicklung der modernen Differentialgeometrie, sondern er war auch der Wegbereiter für die später von Einstein entwickelte Allgemeine Relativitätstheorie.

Georg Friedrich Bernhard Riemann kam am 17. September 1826 als zweites von sechs Kindern eines lutherischen Pastors in dem kleinen Dorf Breselenz bei Dannenberg zur Welt. Dannenberg liegt etwa 30 km nördlich von Salzwedel und 50 km südöstlich von Lüneburg. Riemanns Vater war zuletzt Pastor in Quickborn (heute Dannenberg) und verstarb 1855, seine Mutter, die Tochter eines Hofrats aus Hannover, verlor er schon 1846.

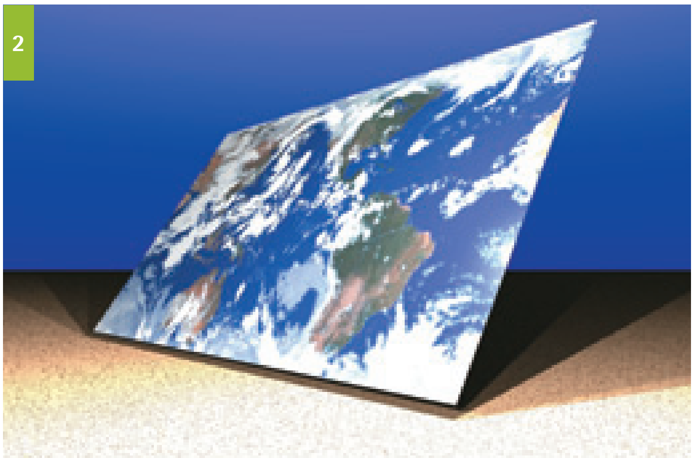
Die sozialen und ökonomischen Rahmenbedingungen der damaligen Zeit sind nicht nur aus heutiger Sicht als sehr unzulänglich zu bezeichnen. Ein Großteil der Bevölkerung musste damals seinen Lebensunterhalt als Tagelöhner, Gelegenheits- oder Landarbeiter verdienen, kinderreiche Familien waren die Regel, ebenso wie hohe Sterblichkeitsquoten in Folge von Auszehrung – besonders bei Kindern – und Schwindsucht. Trotz der vermeintlich besseren wirtschaftlichen und gesellschaftlichen Stellung einer Pastorenfamilie sind jedoch auch Riemanns Lebensverhältnisse während seiner Kindheit als eher beengt und durch Mangel gekennzeichnet anzusehen.

Schulzeit Riemanns

In seiner frühen Jugend zunächst vom eigenen Vater und dann später vom eigens für ihn angestellten Hauslehrer in höherer Arithmetik und Geometrie unterrichtet, zog der junge Riemann nach seiner Konfirmation Ostern 1840 zu seiner Großmutter mütterlicherseits nach Hannover, um dort die Tertia des Lyzeums (heute etwa 8.-9. Klasse) zu besuchen. Eine höhere Schulbildung war zur damaligen Zeit in Dannenberg nicht möglich. Nach dem Tod seiner Großmutter wechselte Riemann Ostern 1842 an das Gymnasium Johanneum in Lüneburg. An Wochenenden wanderte er von dort regelmäßig nach Quickborn zu seiner Familie. Trotzdem Riemann seinen Lehrern schon sehr früh durch seine mathematische Begabung aufgefallen sein muss, sah sein Vater für ihn augenscheinlich eine Laufbahn als Theologe vor und hielt nicht viel von der »brotlosen Kunst« eines Mathematikers.

Schon in seiner Gymnasialzeit machte Riemann seine Sucht nach Perfektion und Präzision zu schaffen. Der Direktor des Gymnasiums, der Mathematiker Schmalfuß, schreibt von Riemann: »*... wie schwer es ihm wurde, in fließendem Vortrage seine Gedanken zu entwickeln. Dazu kam, daß kein Ausdruck ihm genügte, der nicht alles umfaßte, und daß er ungemein zaghaft war, eine Darstellung, die nicht, ... , von untadeliger Präcision war, als richtig anzuerkennen.*« Dieser Drang zur Perfektion war ein solches Hemmnis bei der Abfassung seiner Deutschaufsätze, dass ein weiterer Lehrer Riemanns, der Religions- und Hebräischlehrer Seffer, dies mit den Worten betonte: »*... daß er mit seinen deutschen und lateinischen Aufsätzen immer im Rückstande blieb,..., daß die Lehrer-Conferenz den Schulgesetzen gegenüber seinetwegen in Verzweiflung war.*« Bernhard Riemann erfüllte somit nicht die Pflichtauflagen. Da die beiden Lehrer nicht tatenlos zusehen wollten, wie sein Abitur aus »formalen Gründen« in Gefahr geriet, nahm Seffer Riemann gegen ein geringes Kostgeld in sein Haus auf und verpflichtete sich gegenüber der Lehrer-Konferenz, für die pünktliche Ablieferung seiner Aufsätze und Hausarbeiten zu sorgen.

Constantin Schmalfuß, der Direktor der Schule, wurde 1829 an das Johanneum berufen; ein besonderer Glücksfall, da es sich um einen studierten Mathematiker handelte, der seinem Lehrfach mit einem Schlage die gebührende Stellung innerhalb des Lehrplans verschaffte. Schmalfuß war Riemanns mathematische Begabung früh aufgefallen und er gewährte ihm daher freien Zutritt zu seiner Bibliothek und befreite ihn teilweise vom Mathematikunterricht, da er dort ohnehin völlig unterfordert gewesen wäre. Auf Riemanns Wunsch nach etwas Schwierigerem lieh er ihm Legendres »Zahlentheorie«, ein Werk von 859 Seiten. Eine Woche später gab Riemann es ihm bereits zurück. Als er es so schnell zurückbrachte, mutmaßte Schmalfuß, es sei ihm wohl zu schwierig gewesen. Riemann hatte das Buch jedoch ganz gelesen und beherrschte es völlig.



2

Aufgrund der oben beschriebenen Schwierigkeiten, war abzusehen, dass Riemann den Abituraufsatz in der vorgegebenen Zeit nicht beenden würde. Um ihm dennoch ein Abiturzeugnis »erster Klasse« zu ermöglichen, prüfte ihn Schmalfuß in der Abiturprüfung ohne Ankündigung über Legendres Zahlentheorie, damit auch jeder mathematische Laie sehen müsse, dass es sich um eine ganz herausragende Leistung handele. Dies gelang auch und nun war es nicht weiter schwer, die Altphilologen und Theologen von Riemanns mathematischem Talent zu überzeugen.

Wissenschaftliche Laufbahn

Nachdem Riemann sein Abitur abgeschlossen hatte, ging er nach Göttingen, um dort zunächst ein Semester Theologie zu studieren – wie es der Vater wollte – widmete seine Studien danach aber ganz der Mathematik. In Göttingen konnte Riemann noch Vorlesungen bei Carl Friedrich Gauß besuchen, der aber zur damaligen Zeit nur noch recht anspruchslose Vorlesungen über die Methode der kleinsten Quadrate hielt. Da das Vorlesungsangebot in Göttingen auch insgesamt nicht sehr gut war, zog es Riemann schließlich nach Berlin, wo er bei Dirichlet, Eisenstein, Jacobi und Steiner Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, elliptische Funktionen und Geometrie hörte. Für seine Promotion kehrte Riemann wieder nach Göttingen zurück, wo er im Dezember 1851 seine von Gauß hoch anerkannte Dissertation »*Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe*« abschließen konnte, welche heute eine der Grundlagen der modernen Funktionentheorie bildet.

1854, in seiner ebenfalls in Göttingen anschließenden Habilitationsschrift »*Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch willkürliche Funktionen*«, legt Riemann das wissenschaftliche Fundament für gleich zwei wesentliche Entwicklungen in der Mathematik: Die Fourierreihen und das heute nach Riemann benannte und in Schulen unterrichtete »Riemannsche Integral«. Riemann musste jedoch noch eine Probevorlesung geben und reichte dazu drei Themenvorschläge ein. Es war damals durchaus üblich, den ersten oder zweiten Themenvorschlag auszuwählen und hierauf hatte sich Riemann eingestellt, denn er hatte sich noch nicht gründlich auf das dritte Thema »*Über die Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen*« vorbereitet.

Abbildung 1
Ein Zylinder besitzt keine innere Krümmung.

Abbildung 2
Der Zylinder lässt sich isometrisch auf eine ebene Karte abbilden.

Abbildung 3
Tori liegen gekrümmt im Raum, besitzen aber keine innere Krümmung, wenn Abstände auf ihnen geeignet definiert sind.

Abbildung 4
Der »breather«, eine Fläche negativer Riemannscher Krümmung.

Abbildung 5
Eine deformierte Sphäre

Abbildung 6
Die Kleinsche Flasche, eine Fläche ohne Orientierung.

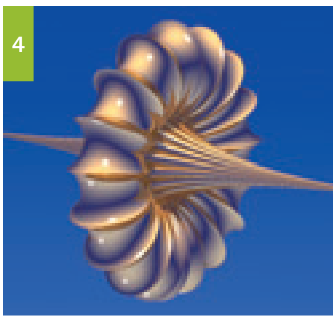
Abbildung 7
Die Barth-Dezik, eine algebraische Fläche mit 345 gewöhnlichen Doppelpunkten (Singularitäten).

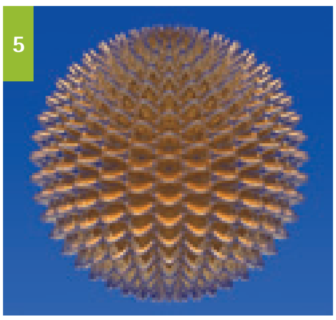
Daher war er ein wenig bestürzt, als Gauß sich ausgerechnet dieses Thema für eine Probevorlesung wünschte (rückblickend wünscht man sich, Riemann hätte über alle drei Themen vorgetragen). Riemann war damals Assistent Webers im Seminar über mathematische Physik und schrieb hierzu: »*… Zwei Wochen nach Ostern hatte ich meine Arbeit, die mich nicht losließ [gemeint ist die Untersuchung der Einheit aller physikalischen Gesetze bei Weber], beendet und begann sofort an meiner Probevorlesung zu arbeiten; zu Pfingsten wurde ich damit fertig.*« Bei der Festsetzung eines Termins ergaben sich dann Schwierigkeiten, denn Gauß war gesundheitlich sehr angeschlagen. Riemann schreibt weiter: »*Da er [Gauß] zu schwach war, um mich zu prüfen, bat er mich, bis August zu warten, in der Hoffnung, dass es ihm dann besser gehen würde; meine Vorlesung sollte ich jedenfalls erst im Herbst halten. Dann entschloß er sich doch am Freitag nach Pfingsten, den Termin für die Vorlesung für den nächsten Tag um halb zwölf festzusetzen. Am Sonnabend hatte ich alles glücklich überstanden.*«

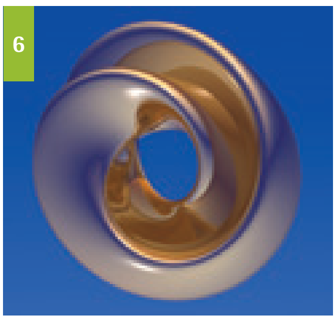
Gauß war von seiner Vorlesung begeistert und zur damaligen Zeit wohl der einzige, der Riemanns Gedanken voll zu würdigen verstand. Was aber war der Kern des Vortrags und worin lag die Bedeutung von Riemanns Untersuchungen zur Geometrie? Riemann entwickelte eine neue Raumauffassung, genannt Mannigfaltigkeit, und definierte den Raum im Sinne eines Raumes in beliebigen Dimensionen, der sich lokal über sogenannte »Karten« durch unseren Anschauungsraum beschreiben lässt. Ferner hatte Riemann erkannt, dass es einen fundamentalen Unterschied zwischen »innerer« und »äußerer« Geometrie gibt und stellte einen von ihm entwickelten »metrischen Tensor« in den Vordergrund seiner Untersuchungen. Dieser metrische Tensor führt wiederum zu einer Krümmungsgröße, die die Mathematiker »Riemannsche Krümmung« nennen. Um was es sich bei diesen Objekten genau handelt, wird den Leser wenig interessieren und eine wissenschaftlich korrekte Definition ist Aufgabe der Mathematik. Intuitiv ist aber jedem klar, was etwa eine gekrümmte, verbogene Fläche im Raum ist.

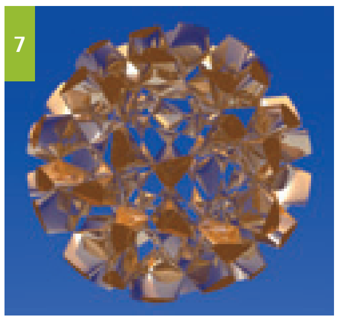
Riemanns Idee und der Unterschied zwischen innerer und äußerer Geometrie lässt sich bis zu einem gewissen Grad recht anschaulich erklären. Nehmen wir als Beispiel etwa den Zylinder (Abbildung 1). Er liegt – zumindest in einer Richtung – gekrümmt im umgebenden Raum. Riemann hat erkannt, dass auf der Fläche (und in höher dimensionalen Gebilden, den »Mannigfaltigkeiten«) auch eine innere Geometrie existiert, die sich einzig und allein aus einem inneren Abstandsbegriff auf der Fläche – einer Metrik – ableiten lässt und zu welcher dann wiederum eine innere Krümmung gehört. Bei unserem Zylinder verschwindet diese innere Krümmung. Dies sieht man etwa, wenn man den Zylinder längs aufschneidet und die Fläche abrollt (Abbildung 2). Bei diesem »Abrollen« – der Mathematiker spricht von einer Isometrie – verändern sich weder die Längen- und Winkelverhältnisse auf der Fläche noch deren zugehörige innere Krümmung. Neben dem Zylinder und der Ebene gibt es noch andere Flächen, bei denen die innere Krümmung verschwinden kann, so etwa beim Torus (Abbildung 3), trotzdem jeder Torus im Raum eine Krümmung relativ zum Raum besitzt.

Gegenstand der Differentialgeometrie ist es, diese Flächen oder auch Objekte höherer Dimension (Riemannsche Mannigfaltigkeiten) zu klassifizieren. Mitunter können dies sehr komplexe Gebilde sein (Abb. 4-7). In Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie verschmelzen Raum und Zeit zu einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit einer Metrik, die Abstände zwischen verschiedenen Raum-Zeit-Punkten misst. Die Anwendungen der Differentialgeometrie und damit auch der Riemannschen Geometrie erstrecken sich heute









auf viele mathematisch-physikalische, technische und ingenieurswissenschaftliche Bereiche, so etwa auf die medizinische Bildbearbeitung oder die Spiele-Programmierung (Abbildung 3 und 8), wenn es z.B. darum geht Texturen auf Oberflächen zu projizieren, oder geometrische Körper zu simulieren.

Freundin seiner Schwester. Mit seiner Frau verbrachte Riemann einige Zeit in Italien, um eine nicht ausgeheilte Lungenentzündung auszukurieren. Dort traf er auch mit den bedeutendsten italienischen Mathematikern der damaligen Zeit zusammen, so z.B. mit E. Betti. Auf seiner Rückreise von Italien flammte dann seine Erkrankung wieder auf, was ihn schließlich 1863 zu seiner zweiten Italienreise zwang. Zwar verschafften ihm Freunde eine Berufung nach Pisa, Riemann wollte aber lieber in Göttingen bleiben und lehnte ab. Im Herbst 1865 kehrte er, gesundheitlich stark angeschlagen, nach Göttingen zurück, um dort weiter zu lehren. Seine dritte und letzte Italienreise schloss sich im Juni 1866 an, doch nur wenige Wochen später verstarb Riemann, nicht ganz vierzigjährig, an Tuberkulose in Selasca am Lago Maggiore, wo er heute begraben liegt.

8

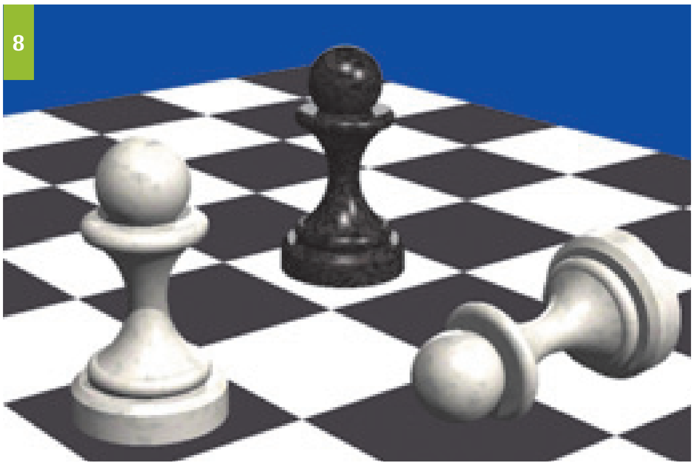


Abbildung 8

Beim »texture mapping«, z.B. in der Spiele-Programmierung, werden lokale Karten benutzt, ein Begriff aus der Theorie der Mannigfaltigkeiten.

Lebensende

Nach dem Tod von Gauß wurde zunächst Dirichlet und nachdem auch Dirichlet im Jahre 1859 gestorben war schließlich Riemann zum ordentlichen Professor auf dessen Lehrstuhl berufen. Durch diesen Schritt wurde Riemann endlich die gebührende Anerkennung zuteil und zahlreiche Ehrungen folgten. Sein Leben war aber insgesamt nicht leicht und wurde von vielen Verlusten begleitet. Die Mutter hatte er schon sehr früh verloren, 1855 starben dann auch sein Vater und eine seiner vier Schwestern. Im Jahre 1857 verstarben sein Bruder (ein Postsekretär in Bremen) sowie eine weitere Schwester. Die beiden verbliebenen Schwestern zogen daraufhin von Bremen nach Göttingen. Auch Riemanns ohnehin angeschlagene Gesundheit hatte in diesen Jahren weiter gelitten, wohl zum Teil durch übermäßige geistige Anstrengungen. 1862, auf dem Höhepunkt seiner wissenschaftlichen Laufbahn, heiratete Riemann Elise Koch, eine

Wirken Riemanns

Riemann hat mit seinem Schaffen und seinen Vorstellungen vom begrifflichen Denken die Entwicklung der Mathematik maßgeblich beeinflusst. Er hat sich ebenfalls mit philosophischen Fragen beschäftigt, jedoch blieb die Ausarbeitung seiner Ideen auf einige Ansätze beschränkt. Unter den Mathematikern ist Riemann wahrscheinlich bis heute derjenige mit dem größten konzeptionellen Weitblick. Dabei war er nicht gerade produktiv, gemessen an der Anzahl seiner Publikationen. Riemanns wenige Arbeiten bestechen vielmehr durch ihre Originalität, ihre mathematische Bedeutung und durch ihre Tragweite. Jede einzelne Arbeit Riemanns hat die moderne Mathematik in vielfältigster Weise gefördert, wenn nicht gar revolutioniert. Dies wird auch durch die Zahl der nach Riemann benannten Fachausdrücke belegt. Setzt man also, um es mit modernen Begriffen auszudrücken, den »impact factor« seiner Arbeiten in Relation zu Riemanns Publikationsdichte, so nimmt er unangefochten den ersten Platz ein. Dies trifft auch bei den noch ungelösten mathematischen Problemen zu; die »Riemannsche Vermutung« über die Verteilung der Primzahlen unter einer gegebenen Größe ist die »Königin« aller unbewiesenen Vermutungen in der Mathematik und gehört zu den »Unsolved Seven Problems« (eine dieser sieben Vermutungen, die Poincaré-Vermutung, wurde erst kürzlich durch Arbeiten von Grisha Perelman und Richard Hamilton bewiesen), für deren Lösung das Clay Mathematics Institute eine Million Dollar ausgelobt hat.

Literatur

- B. Riemann: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, aus dem Nachlass des Verfassers, mitgeteilt durch R. Dedekind, Abh. Kgl. Ges. Wiss., Göttingen 1868.
- Felix Klein: Riemann *und seine Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 1894 (5).
- Eric Temple Bell: *Men of mathematics*, New York 1986 (Erstauflage 1937) – auf Deutsch unter dem Titel: *Die großen Mathematiker*, Econ Verlag 1967.
- *Lexikon der Mathematik*, 4. Band, Spektrum, Akad. Verlag.
- Umberto Bottazzini und Rossana Tazzioli: *Naturphilosophie and its role in Riemann's mathematics.* Revue d'Histoire des Mathématiques 1:3–38, 1995.

Prof. Dr. Knut Smoczyk

Jahrgang 1968, ist Professor für Differentialgeometrie und Leiter des gleichnamigen Instituts an der Fakultät für Mathematik und Physik