Über das Wesen der Welle

ZUR MATHEMATISCHEN MODELLIERUNG VON TSUNAMIS

Welle ist nicht gleich Welle. Einzelwellen, so genannte Solitonen, deren Verlauf heute mathematisch recht gut beschrieben und verstanden wird, scheinen nicht der Wellentyp zu sein, der im Dezember 2004 die Küsten des indischen Ozeans verwüstet hat. Doch wie verhalten sich Tsunami-Wellen und was unterscheidet sie von anderen Wellen?

Einführung

Die verheerenden Folgen des Tsunamis vom Dezember 2004 im Indischen Ozean haben eine breite Forschungstätigkeit auf dem Gebiet der Angewandten Analysis initiiert, mit dem Ziel ein möglichst weit reichendes Modell zur Beschreibung dieser Naturphänomene herzuleiten. Leider liegen kaum Messdaten vor, sodass neben allgemeinen Prinzipien nur phänomenologische Beschreibungen vorliegen. Zunächst lässt sich festhalten, dass Tsunamis aus einer Serie aufeinander folgender, sehr langperiodischer Meereswellen bestehen. Diese werden meist durch starke Seebeben, untermeerische Vulkanausbrüche oder Hangrutschungen verursacht. Die äußere Erscheinungsform als Wellenpaket hat dazu geführt, so genannte Solitonen zur mathematischen Modellierung von Tsunamis heranzuziehen. Obwohl Tsunamis und Solitonen ähnliche Eigenschaften aufweisen, handelt es sich doch um grundsätzlich unterschiedliche Wasserwellenphänomene. Im Folgenden werden offensichtliche Ähnlichkeiten, aber auch fundamentale Unterschiede kurz erläutert.

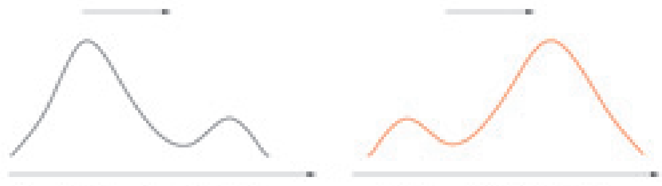
Solitonen

Solitonen sind so genannte Einzelwellen (»solitary waves«). Darunter versteht man besondere zweidimensionale Wasserwellen[1], deren Kammlinien Geraden sind, die senkrecht zur zweidimensionalen Bewegungsebene stehen. Folglich können Solitonen mit Hilfe eines Zeitparameters t und zwei räumlichen Dimensionen beschrieben werden. Außerdem besitzen Solitonen keinen Wellentiefpunkt. Sie bewegen sich mit einer konstanten, zur maximalen Wellenhöhe proportionalen Geschwindigkeit und einem festen, zum Scheitelpunkt symmetrischen Profil.

Neben der eben beschriebenen äußeren Form einer Einzelwelle besitzen Solitonen aber noch eine weitere bemerkenswerte innere Struktur: Die Form und Geschwindigkeit eines Solitons bleibt nach der Interaktion mit anderen Solitonen erhalten. Die dabei beobachtete Phasenverschiebung zeigt, dass Solitonen *keinem* Superpositionsprinzip unterliegen und somit natürlicherweise in eine nichtlineare Wellentheorie eingebettet sind. Phänomenologisch kann die nichtlineare Solitoneninteraktion wie folgt beschrieben werden. Aufgrund der Tatsache, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Solitons zu seiner Wellenhöhe proportional ist, werden in Wellenzügen, die aus mehreren Wellen bestehen, größere Wellen kleinere Wellen überholen. Der Einfachheit halber wollen wir dieses Phänomen anhand eines aus zwei Wellen bestehenden Wellenzugs kurz beschreiben. Dazu nehmen wir an, dass sich zum Zeitpunkt $t = 0$ eine kleine Welle vor einer großen Welle befinde. In endlicher Zeit wird die große Welle die kleine einholen und es findet eine komplizierte nichtlineare Wechselwirkung statt. Mit fortschreitender Zeit erkennt man jedoch wieder zwei Einzelwellen, die sich ihren ursprünglichen Profilen annähern.

Mathematisch versteht man diese nichtlineare Interaktion heutzutage ziemlich gut. Sie

Zwei Solitonen mit unterschiedlichen Profilen



$t = 0$: Beginn der Beobachtung $t = T$: nach T Zeiteinheiten beruht auf spektraltheoretischen Eigenschaften, wobei Methoden der harmonischen Analysis und der Funktionentheorie zu deren Untersuchung eingesetzt werden. Neben theoretischen Ergebnissen, stehen auch zahlreiche numerische Simulationen zur Verfügung. Außerdem kann die Solitoneninteraktion experimentell im Labor nachgewiesen werden [2].

Unser Wissen über Solitonen entstammt einer mathematischen und physikalischen Forschung, die sich über die letzten 125 Jahre erstreckt. Der erste wissenschaftliche Bericht einer Solitonenwelle ist jedoch noch älter, und geht in das Jahr 1834 zurück. Der britische Ingenieur John Scott Russell machte damals auf der Deichkrone eines Kanals in Schottland folgende Beobachtung, vgl. [3]:

»I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped – not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course a long the channele apparently without change of form or diminuation of speed.«

Wie bereits erwähnt, sind Solitonen nichtlineare Phänomene und können innerhalb einer linearen Theorie nicht erklärt werden. Weil im 19. Jahrhundert vorwiegend lineare Wellentheorien Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen waren, wurde Russels Beobachtung in Fachkreisen nicht akzeptiert [6]. Erst im Jahre 1895 haben der holländische Mathematiker Diederik Korteweg und sein damaliger Doktorand Gustav de Vries ein nichtlineares Modell für Flachwasserwellen hergeleitet, das die heutzutage berühmten Korteweg-de Vries (KdV) Gleichung hervorbrachte, vgl. [4]. Flachwasserwellen sind Wellen, deren Wellenlänge die durchschnittliche Wassertiefe deutlich übersteigt (in praktischen Anwendungen wird mindestens ein Faktor 10 verlangt). Wir können hier die faszinierende Schönheit der Theorie der KdV-Gleichung nicht weiter darstellen, wollen aber noch kurz folgende bemerkenswerte Eigenschaft erläutern:

Jede Welle, die im Unendlichen schnell genug gegen Null strebt, lässt sich mit fortschreitender Zeit in mehrere Solitonen zerlegen, die nach Höhe und Geschwindigkeit geordnet sind [2, 3]. Dies bedeutet insbesondere, dass die Solitonen nicht nur spezielle Lösungen der KdV-Gleichung sind, sondern dass sie vielmehr das asymptotische Verhalten jeder schnell fallenden Lösung beschreiben.

Tsunamis sind keine Solitonen

Die eben dargelegte asymptotische Eigenschaft der Lösungen der KdV-Gleichung erklärt teilweise die Versuche, Tsunamis mit Solitonen beschreiben zu wollen, vgl. [5]. Die folgenden weiteren Beobachtungen stützen die Hypothese, Tsunamis als Solitonen zu betrachten. Erstens werden Tsunamis üblicherweise von Seebeben verursacht. Solche Seebeben bewirken auch eine Verschiebung der tektonischen Platten, die sich über mehrere Hundert Kilometer erstrecken. Da der tiefste Punkt im Ozean ungefähr in elf Kilometer Tiefe liegt, müssen Tsumanis als Flachwasserwellen betrachtet werden. Zweitens stellt man fest, dass sich Tsunamis über mehrere Tausend Kilometer fortpflanzen[2], um dann in der Nähe der Küste als Welle mit wenigen isolierten Wellenbergen aufzutreten.

Eine genauere Untersuchung zeigt jedoch, dass es gute Gründe gibt, diese Tsunamis nicht als Solitonenwellenzüge zu betrachten. Wären nämlich die beobachteten Wellen eines Tsunamis in der Nähe der Küsten aus Solitonen zusammengesetzt, so müssten diese Solitonen der Höhe nach geordnet auftreten. Dies scheint aber äußerst selten der Fall zu sein, auch wenn die Laufzeit des Wellenzuges groß genug war, um sich, wie oben beschrieben, in Solitonen zerlegen zu können. Beispielsweise wurde der Tsunami im Dezember 2004 vor der Küste Sumatras von einem Seebeben verursacht, das sich ungefähr über eine elliptische Fläche von 100 Kilometern Breite und 1.300 Kilometern Länge erstreckte. Der erste Wellenberg erreichte Sri Lanka nach einer Laufzeit von 2 Stunden und 12 Minuten mit einer Höhe von 1 Meter, während der zweite Wellenberg mit einer Höhe von 10 Metern etwa 10 Minuten später auf die Küste auftraf [6, 7].

Ein weiterer Hinweis, dass Tsunamis nicht durch Solitonen beschrieben werden können, ist die Tatsache, dass die erste Welle des Tsunamis vom 26. Dezember 2004, die den Strand bei Hat Ray Leach in Sri Lanka traf, eine Senkwelle war, d.h. die Welle wies nur einen Wellentiefpunkt, aber keinen Scheitelpunkt auf. Diese Beobachtung deckt sich mit Berichten über einen merkwürdigen Wasserrückzug des Ozeans vor dem Auftreffen des Tsunamis, vgl. [6, 7].

Zur Modellierung von Tsunamis

Wir beschließen unsere Ausführungen mit der Beschreibung möglicher Ansatzpunkte zur Modellierung von Tsunamis. Wie wir bereits oben festgehalten haben, müssen Tsunamis als Flachwasserwellen betrachtet werden. Des Weiteren hat man beobachtet, dass die maximale Wellenhöhe der

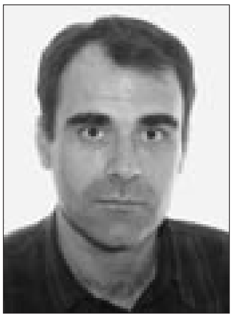
1 Man kann mathematisch rigoros beweisen, dass es keine dreidimensionalen Einzelwellen gibt, vgl. [1].

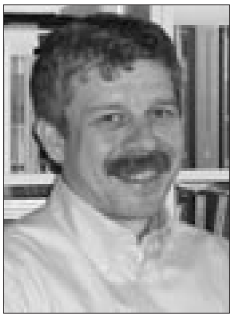
2 Der Tsunami vom Dezember 2004 vor Sumatra hat sich über 24.000 km fortgepflanzt.

Wie kann sich die Mathematik dem Tsunami-Phänomen wissenschaftlich nähern und wie können Tsunamis mathematisch richtig beschrieben werden? Ein Wissenschaftler des Instituts für Angewandte Mathematik und ein Gastwissenschaftler und Bessel-Preisträger zeigen den Stand der Forschung.

Abbildung 1 (links außen)
Solitone können unterschiedliche Formen aufweisen.

Abbildung 2 (links innen)
Größere Solitone sind schneller und überholen kleinere Solitone. Später finden beide Einzelwellen wieder zu ihrer Ursprungsgröße zurück.





Prof. Dr. Adrian Constantin
Jahrgang 1970, bekleidet den Erasmus Smith's Chair for Mathematics (1764) am Trinity College Dublin. Im vergangenen Jahr wurde Prof. Constantin mit dem Friedrich-Wilhelm Bessel Forschungspreis der Alexander von Humboldt-Stiftung ausgezeichnet. Im Rahmen dieses Forschungspreises wird Prof. Constantin im kommenden akademischen Jahr als Gastprofessor an der Leibniz Universität Hannover tätig sein.

Prof. Dr. Joachim Escher
Jahrgang 1962; leitet die Arbeitsgruppe »Angewandte Analysis« am Institut für Angewandte Mathematik der Leibniz Universität Hannover. Er ist seit 2000 an der Leibniz Universität Hannover tätig.

Tsunamis nach dem Seebeben rasch abnimmt, und über tiefem Meeresboden höchstens eine Höhe von 0,5 Metern aufweist. Dies war auch beim Tsunami vom Dezember 2004 vor Sumatra der Fall, obwohl die Bewegung der tektonischen Platten eine Welle mit ursprünglicher Höhe von 10 Metern hervorrief. Es gibt Ansätze, Tsunamis in Bereichen großer Meerestiefe durch lineare Wellengleichungen zu beschreiben. Für Wellengeschwindigkeit gilt dann $c = \sqrt{gh}$ wobei h für die durchschnittliche Meerestiefe in Metern und $g = 9{,}81\ m/s^2$ für die Erdbeschleunigung steht.

Solche Ansätze erklären insbesondere die beobachtete Geschwindigkeit von über 800 km/h, wie sie auch im Falle des Tsunamis vom Dezember 2004 auftraten. Im Gegensatz zur obigen linearen Wellengleichung, kann die KdV-Gleichung als Ausgleichsmechanismus zwischen der Nichtlinearität und der Dispersion verstanden werden: Ohne Dispersion würde die Nichtlinearität die Welle in eine Singularität, eine so genannte Wellenbrechung treiben, vgl. [8, 9]. Da die Aufzeichnungen von Tsunamis Längenskalen nahe legen, die einen wesentlichen, durch Dispersion hervorgerufenen Effekt ausschließen, können die Nichtlinearitäten über tiefem Meeresboden vernachlässigt werden, was den linearen Ansatz bestätigen würde. Das Auftreten von Wellenbergen in der Nähe der Küste könnte auf den wachsenden Einfluss der abnehmenden Meerestiefe zurückgeführt werden. Somit scheint der lineare Ansatz in diesen Bereichen nicht mehr gerechtfertigt zu sein und nichtlineare Effekte müssen berücksichtigt werden. Da der Einfluss der Dispersion weiterhin keine wesentlichen Beiträge liefert, ist eine Wellenbrechung unvermeidlich. Die Entwicklung eines mathematischen Rahmens, in dem solche Überlegungen schlüssig formuliert werden können, ist Gegenstand aktueller Forschungsvorhaben im Bereich der Angewandten Analysis.

Abbildung 3
Deutlich zu erkennen: Der Tsunami war kein Solitonen-Phänomen, denn die kleine Welle läuft vor der größeren Welle an die Küste.
Quelle: Scanpix

Quellen

[1] W. Craig, Non-existence of solitary water waves in three dimensions, R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A 360 (2002), 2127–2135.
[2] http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/
[3] J. S.Russell, Report on Waves, 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, London, 1844.
[4] D. J. Korteweg und H. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag. 39 (1895), 422–443.
[5] http://de.wikipedia.org/wiki/Tsunami
[6] P. L. F. Liu, P. Lynett, H. Fernando, B. E. Jaffe, H. Fritz, B. Higman, R. Morton, J. Goff und C. Synolakis, Observations by the International Tsunami Survey Team in Sri Lanka, Science 308 (2005), 1595.
[7] V. Titov, A. B. Rabinovich, H. O. Mofjield, R. E. Thomson und F. I. Gonzalez, The global reach of the 26 December 2004 Sumatra tsunami, Science 309 (2005), 2045–2048.
[8] A. Constantin und J. Escher, Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations, Acta Mathematica 181 (1998), 229–243.
[9] J. Escher, Wave breaking and shock waves for a periodic shallow water equation, Phil. Trans. Royal Society, 365 (2007), 2193—2376.