Warum die Börse die Mathematik braucht

STATISTISCHE METHODEN ZUR ANALYSE VON FINANZMARKTDATEN

Ökonometrie und Statistik werden in den Wirtschaftswissenschaften häufig als Randbereiche betrachtet, deren Methoden und Verfahren man sich gerne in einzelnen Problemfällen zu Hilfe nimmt. Tatsächlich gibt es aber in Theorie und Praxis einen wichtigen Bereich in der Wirtschaft, der ohne Ökonometrie und Statistik völlig anders aussehen würde: Die modernen Entwicklungen im Finanzbereich sind überhaupt erst durch hochkomplexe statistische Theorien und Modelle ermöglicht worden. Ein Wissenschaftler des Instituts für Statistik zeigt, wie die Mathematik die Börse gestaltet.

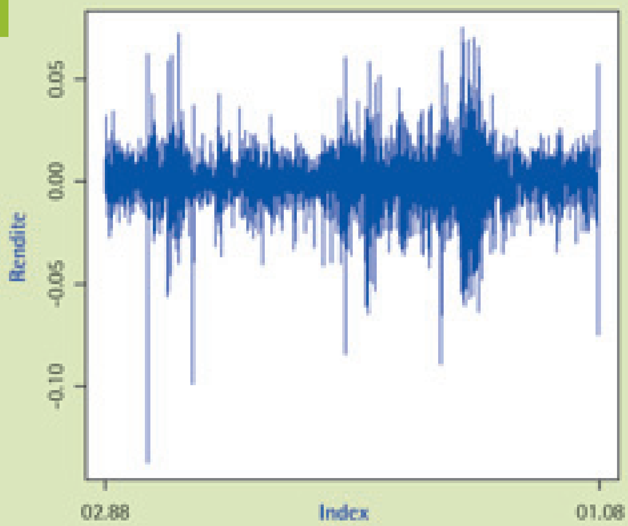
1

Der moderne Finanzmarkt ist ohne statistische Methoden und Theorien nicht denkbar. Die Bewertung der verschiedensten Risiken von Finanzinstitutionen wie beispielsweise Banken ist erst durch statistische Modelle möglich geworden. Gleiches gilt für die Bepreisung der verschiedensten an der Börse gehandelten Finanzgüter. Bereits die Preisfindung für die einfachsten Aktienoptionen benötigt schwierigste statistische Theorien.

Erst als sich Black, Scholes und Merton in den siebziger Jahren dieser auf stochastischen Prozessen und stochastischer Integration basierenden Theorien annahmen, gelang es ihnen, einen fairen Preis für einfachste Aktienoptionen zu ermitteln. Hierfür wurden Scholes und Merton 1997 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet (Black war bereits verstorben). Man kann sich leicht vorstellen, dass die Theorien zur Bepreisung komplexer Finanzprodukte, wie sie heute an den Börsen gehandelt werden, entsprechend komplizierter sind.

Näher möchte ich allerdings auf den ersten angesprochenen Punkt eingehen, der Einsatz statistischer Verfahren zur Risikomessung bei Finanzinstitutionen. Alle Finanzinstitutionen müssen sich gegen eine Insolvenz bei der Bundesbank absichern. Dazu wird ein Teil des mit dem gehaltenen Portfolio eingegangenen Risikos bei der Bundesbank als Eigenkapital hinterlegt. Wie misst man aber das Insolvenzrisiko einer großen Finanzinstitution? Hierzu wird der so genannte Value at Risk als Risikomaß verwendet. Der Value at Risk gibt an, welchen Verlust die Finanzinstitution mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit in einem bestimmten Zeitraum macht. Dies entspricht einem Quantil der Renditeverteilung des Portfolios der Finanzinstitution. Dies ist eine rein statistische Maßzahl. Das Problem bei der Berechnung des Value at Risk ist, dass die zugrunde liegende Portfolioverteilung in aller Regel unbekannt ist und somit auch keine Quantile berechnet werden können. Man versucht daher mittels statistischer Modelle, das Verhalten des Portfolios so gut wie möglich zu beschreiben, um dadurch Kenntnis über die Portfolioverteilung zu erhalten. Dabei stellt man fest, dass Finanzmarktdaten Besonderheiten haben, die sie von anderen ökonomischen Zeitreihen unterscheiden. Nehmen wir vereinfachend einmal an, die Finanzinstitution hält nur eine Aktie, beispielsweise den Deutschen Aktienindex DAX. Die täglichen Renditen, also die Änderungsraten, des DAX von Februar 1988 bis Ende Januar 2008, also der letzten 20 Jahre, sehen wie folgt aus:

2



Man sieht, dass die Renditen des DAX Phasen mit großen Ausschlägen haben aber auch Phasen, in denen sehr wenig passiert. Es scheint also eher längere Phasen nervöser Märkte und ausgedehnte Ruhephasen zu geben. Diese Clusterbildung hat weit reichende statistische Konsequenzen. Diese Konsequenzen beziehen sich allerdings nicht auf die Renditen selbst, sondern auf die Streuung der Renditen. Die Streuung wird auch gerne als Maß für das Risiko einer Finanzposition angesehen. Die Streuung von Aktienrenditen erscheint nicht mehr konstant über die Zeit zu sein, sondern sich mit der Zeit zu ändern. Sie ist also nicht eine feste Zahl, wie sonst in der Statistik oft üblich, sondern selbst von Zufallseinflüssen abhängig. Eine Folge dieser so genannten Volatilitätscluster ist, dass extreme Börsenereignisse häufig beobachtet werden. Sie werden wesentlich häufiger beobachtet als man es unter der in der Statistik üblichen Normalverteilung für die Renditen erwarten würde. Andererseits beobachtet man auch sehr viele sehr kleine Renditen, an den allermeisten Tagen passiert nichts Auffälliges mit einem Aktienkurs. Die Änderungsraten liegen in aller Regel nur um 1 Prozent. Man beobachtet eine starke Konzentration der Renditen um ihren Mittelwert herum. Verteilungen mit diesen Eigenschaften, einer starken Konzentration in der Mitte und an den Rändern, nennt man auch leptokurtisch. Die Eigenschaft, eine leptokurtische Verteilung zu besitzen, ist typisch für Finanzmarktdaten.

Am Beispiel des DAX kann man das sehen, wenn man wie in der nebenstehenden Grafik (Abb. 3) die empirische aus den Renditen berechnete Verteilung (Histogrammbalken) mit der Normalverteilung (grüne Linie) vergleicht. Um den Mittelwert Null herum sind die Histogrammbalken deutlich höher als die Normalverteilungskurve, es gibt also mehr kleine Renditen als man das unter der Normalverteilung erwarten würde. Das gleiche gilt für die Ränder der Verteilung.

Eine weitere Folge der Volatilitätscluster ist, dass die Varianzen, also die Streuung der Daten eine stark persistente Struktur aufweisen. Dabei spricht man von Persistenz, wenn auf große Werte mit hoher Wahrscheinlichkeit wieder große Werte folgen und auf kleine mit hoher Wahrscheinlichkeit kleine Werte folgen. Diese Persistenz führt zu einer langfristigen Abhängigkeitsstruktur, einem langen Gedächtnis, in den Varianzen, die weitreichende Konsequenzen bei der Prognose von Varianzen hat. Je stärker Abhängigkeiten in den Daten vorhanden sind, umso besser lassen sich zukünftige Werte prognostizieren. Betrachtet man die quadrierten Renditen als Maß für die Varianzen grafisch, so sieht man die persistente Struktur mit Phasen hoher und niedriger quadrierter Renditen.

Zur Darstellung der Abhängigkeitsstruktur in den quadrierten Renditen betrachtet man die Autokorrelationen, ein Maß für die Abhängigkeit zwischen zwei Datenpunkten. Auf der x-Achse ist der zeitli-

3

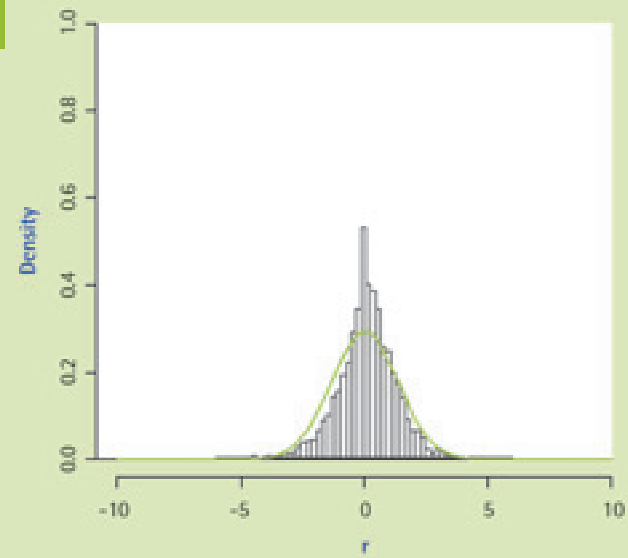
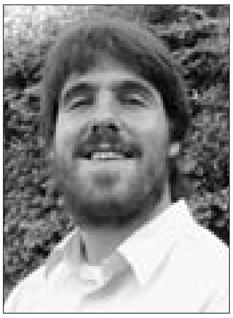


Abbildung 1 links
Ökonometrie und Statistik machen es möglich: Hinter den Entwicklungen im modernen Finanzmarkt stehen hochkomplexe statische Theorien und Modelle
© dpa Report

Abbildung 2
Tägliche Änderungsraten (logarithmiert) des DAX von 1988 bis 2008

Abbildung 3
Verteilung der täglichen DAX-Renditen



Prof. Dr. Philip Sibbertsen
Jahrgang 1972, ist Mathematiker und seit 2005 am Institut für Statistik an der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Leibniz Universität Hannover, Schwerpunkt: Statistik der Finanzmärkte

Abbildung 4
Tägliche quadrierte Renditen des DAX von 1988 bis 2008

Abbildung 5
Autokorrelationen der quadrierten DAX-Renditen

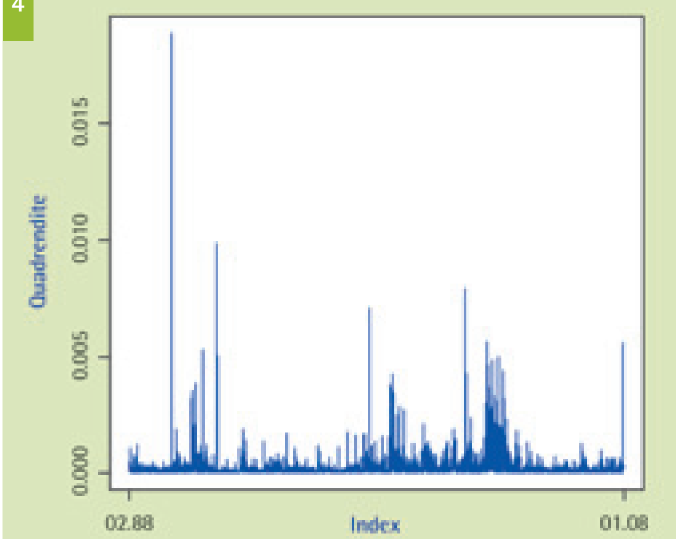
che Abstand zwischen den Beobachtungen abgetragen, die y-Achse gibt die Stärke des Zusammenhangs an (Abb. 4).

Es ist ersichtlich, dass die Autokorrelationen nur langsam verschwinden, es scheint eine starke Abhängigkeitsstruktur vorzuliegen (Abb. 5).

Zur Modellierung dieser Besonderheiten hat Robert Engle 1982 die Klasse der ARCH-Modelle eingeführt. ARCH steht dabei für Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. Es werden also die bedingten Varianzen, bedingt auf alle zum gegenwärtigen Zeitpunkt verfügbare Information, als autoregressives Zeitreihenmodell betrachtet. Die bedingten Varianzen werden in diesen Modellen als Summe vorheriger quadrierter Renditen beschrieben. Die Einführung dieser Modelle hat geradezu eine Explosion statistisch-mathematischer Arbeiten im Bereich Finance ausgelöst. Daher wurde Robert Engle für die Einführung dieser Modelle im Jahr 2003 mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet.

ARCH-Modelle können eine ganze Reihe der oben erläuterten Eigenschaften von Finanzmarktdaten erfassen. So modellieren sie die Volatilitätscluster und die schweren Ränder der Renditeverteilung. Das lange Gedächtnis in den Varianzen können sie allerdings nicht erfassen. Auch zahlreiche andere, hier nicht erwähnte, Eigenschaften von Finanzzeitreihen werden von ARCH-Modellen nicht beschrieben. Daher gibt es inzwischen eine ganze Flut von Abwandlungen dieser Modelle zur möglichst genauen Beschreibung der Datenstrukturen. In den Risikoabteilungen der Banken und Versicherungen werden diese Modelle genutzt, um möglichst gute Prognosen für zukünftige Varianzen zu erstellen. Hiermit kann dann das Risiko von Finanzpositionen abgeschätzt und kalkuliert werden.

4



5