Das Ei des Kolumbus

GEOMETRISCHE IDEEN – (FAST) OHNE ZAHLEN

Manchen Menschen erscheint die Mathematik als »Scheusal«, dem nicht beizukommen ist. Ein Forscher des Instituts für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik zeigt, warum für mathematisch aufgeschlossene Ästheten das vermeintliche Scheusal in Wirklichkeit eine Schönheit ist.

Mathematik – Schönheit oder Scheusal?

»Und was machen Sie beruflich?« Zögernde Antwort: »Etwas im Bereich der Mathematik …«. Spontane Reaktion: »So was Strohtrockenes? Hätte ich Ihnen gar nicht zugetraut!« – Moderator zum Promi: »Hey, du durftest vor dem Abi Mathe abwählen? Ist ja voll genial!« – Ein anderes Interview: »Und wer ist bei Ihnen der Kopf der Mannschaft?« Antwort: »Das ist der Axel, der ist sozusagen der Mathematiker im Team.« Sportreporter: »Eigentlich macht der doch einen ganz normalen Eindruck!« – Vati stolz: »Der Kleine ist ja so was von schlau, aber in Mathe bringt er immer 'ne 5 nach Hause.« Verständnisvolle Sympathiekundgebungen. »Von Mathe hatte ich auch nie 'nen Schimmer.«

Warum halten sich hartnäckig Vorurteile und Ablehnung gegenüber der Mathematik und denen, die sie betreiben? Vielleicht vermögen die nachfolgenden bildhaften Beispiele und Anregungen die weit verbreitete Abneigung gegen Mathematisches ein wenig zu mildern und das Vorurteil, da ginge es doch nur um dröges Rechnen, abzubauen – gemäß dem Motto: »Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte«. Natürlich ist ein Bild kein Beweis – aber sicherlich eine willkommene Denkhilfe.

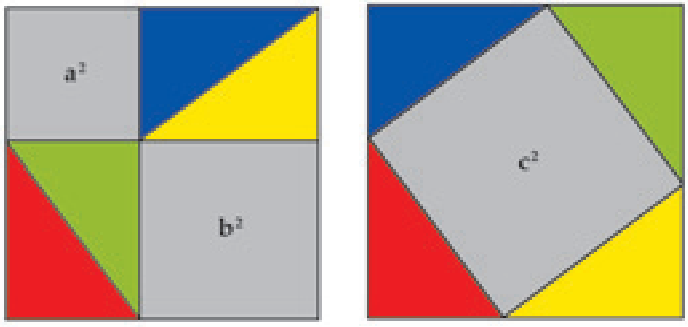


Abbildung 1
Der Satz des Pythagoras:
$a^2 + b^2 = c^2$

Der Satz des Pythagoras

besticht seit drei Jahrtausenden nicht nur durch seine Ästhetik, sondern auch durch seine unzähligen Anwendungen in Naturwissenschaften und Technik. Wenngleich Pythagoras Zahlen über alles schätzte, wollen wir hier zur Einstimmung seinen berühmten Lehrsatz ganz ohne Zahlenbeispiele und verbale Beweise auf uns wirken lassen – die Bilder sprechen für sich (Abb. 1).

Das Vermächtnis des Archimedes

Archimedes von Syrakus (3. Jh. v. Chr.) gilt weithin als das größte mathematische Genie der Antike. Nicht zu Unrecht, denn neben seinen raffinierten physikalischen und technischen Erfindungen hat er die glasklare und unbestechliche Form der mathematischen Beweisführung zur ersten Hochblüte gebracht, die so zwei Jahrtausende überdauerte. Viele faszinierende Erkenntnisse verdanken wir Archimedes durch sein Werk über *Kugel und Zylinder*. Vielleicht das brillanteste Ergebnis ist die Proportionsformel, welche besagt: *Die Volumina von Kegel, Kugel und Zylinder verhalten sich bei gleicher Höhe und Breite wie 1:2:3* (Abb. 2).

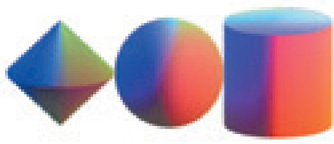


Abbildung 2
Kegel, Kugel und Zylinder

Eine Pizza für den Meister

Um diese Volumina exakt zu berechnen, braucht man die berühmt-berüchtigte Kreiszahl π, das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises. Wer jemals etwas über dieses »kleine mathematische Monster« gehört hat, weiß meist auch, dass π zugleich das Verhältnis zwischen der Fläche eines Kreises und der Fläche eines Quadrats über seinem Radius ist. Aber diese

Es gibt Dinge, die den meisten Menschen, die nicht Mathematik studiert haben, unglaublich erscheinen.

Archimedes

Tatsache ist keineswegs selbstverständlich – und so steht denn am Anfang des berühmten Buches von Archimedes ein exakter Beweis dieser Beziehung. Um seine Grundidee zu verstehen, fügen wir den vielen Anekdoten um seine Person eine weitere frei erfundene hinzu. Der Pizzabäcker von Syrakus liefert eine kreisrunde Pizza (mit Radius r). Um sie in einem rechteckigen Karton zu verpacken, zerschneidet er sie entlang diverser Durchmesser (daher der Name?) in sektorförmige Stücke und legt diese abwechselnd mit der Spitze nach oben und nach unten aneinander. Und Archimedes erkennt sofort: Je mehr Stücke, desto besser passen sie insgesamt in eine Schachtel der Länge r und der Breite $r\pi$, also mit der Fläche $r^2\pi$ (Abb. 3).

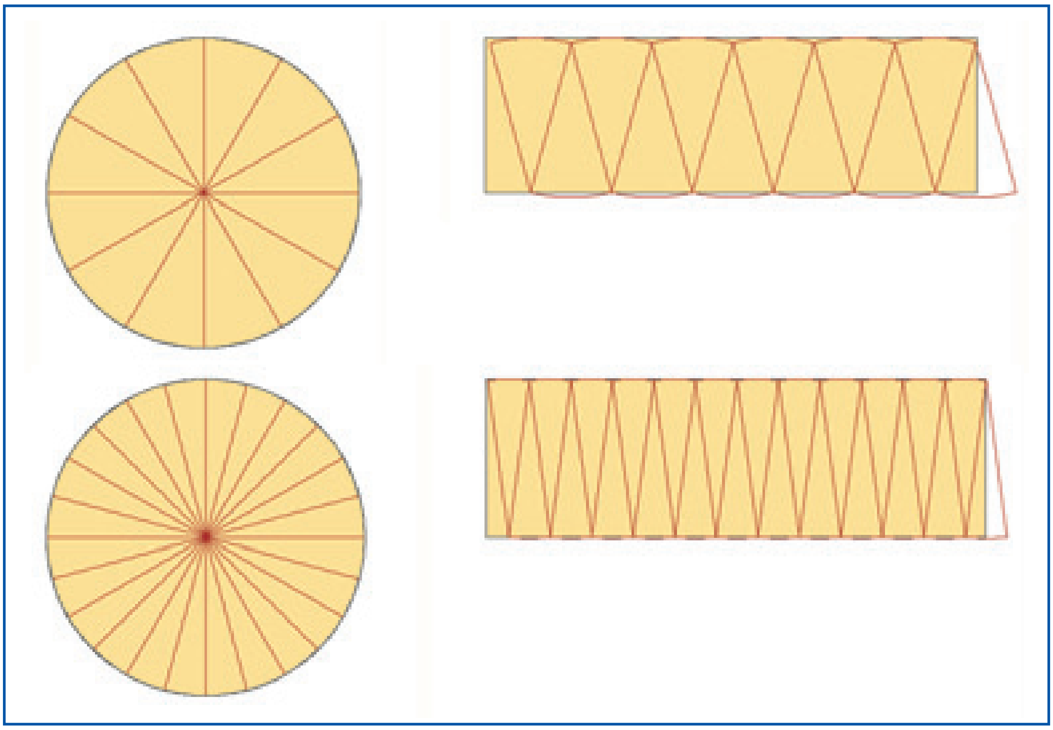


Abbildung 3 links
Die Pizza in der Schachtel

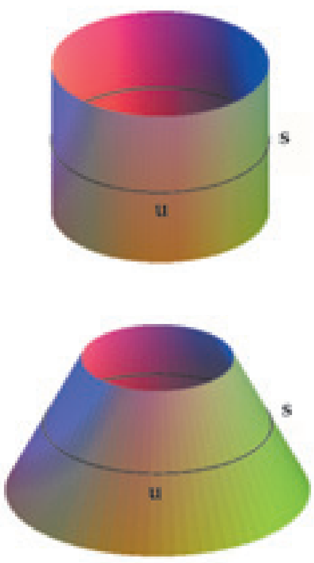
Natürlich hat Archimedes nicht so schlampig argumentiert. Vielmehr benutzte er einen vorher bewiesenen Satz, nach dem sich die Fläche des Kreises um beliebig wenig von derjenigen eines regelmäßigen ein- oder umbeschriebenen Vielecks genügend großer Seitenzahl unterscheidet.

Interessant ist dabei, dass er mit seiner Methode die exakten Definitionen von Konvergenz und Stetigkeit des 18. und 19. Jahrhunderts, wie sie als Grundlagen der Analysis noch heute im Gebrauch sind, prinzipiell vorweggenommen hat. Das Attraktivste an dieser Methode ist aber sicher die Idee, nicht die genaue Durchführung des Beweises. Wahrscheinlich ist es gerade die Präzision des strengen und lückenlosen Beweises, welche viele Menschen überfordert oder sogar abstößt, weil das Nachvollziehen viel Geduld und Konzentration verlangt. Muss man offenkundig richtige Sachverhalte ausführlich begründen? Sind Mathematiker Pedanten, weil sie es ganz genau wissen wollen? Nein, die Intention gründlicher Beweise ist es, Missverständnisse und Fehler zu vermeiden. Besonders deutlich wird dies bei Leibniz, wenn er vorschlägt, eine allgemein verbindliche, mathematische Sprache zu erfinden, um fruchtlosen Diskussionen aller Art aus dem Wege zu gehen, bei denen Gesprächspartner aneinander vorbeireden oder unschlüssige Argumente vorbringen: »*Lasst uns rechnen*« war seine Devise. Wir wollen hier die Kunst üben, sich sogar das Rechnen zu ersparen – durch raffinierte Ideen.

Krumme Oberflächen: Die Ziehharmonikamethode

Obwohl Oberflächen von Zylindern und Kegeln gekrümmt sind, ist ihr Flächeninhalt leicht zu bestimmen. Den Mantel (die »Hülse«) eines Zylinders mit Höhe h und Radius r rollt man in eine Ebene ab und bekommt für das entstehende Rechteck sofort den Flächeninhalt $2\pi rh$. Nicht ganz so einfach ist es bei einem Kegelstumpf (einer abgeschnittenen Kegelscheibe mit schräger »Böschung«) (Abb. 4).

Abbildung 4 unten
Zylinder und Kegelstumpf



Verallgemeinern wir die »Pizzamethode« zur »Ziehharmonikamethode«! Um die Mantelfläche eines Kegelstumpfes zu berechnen, stellen wir uns ein aus Karton gebasteltes Modell vor. Die in eine Ebene abgerollte Fläche ist dann die Differenz zweier Kreissektoren. Und indem wir diese wie-

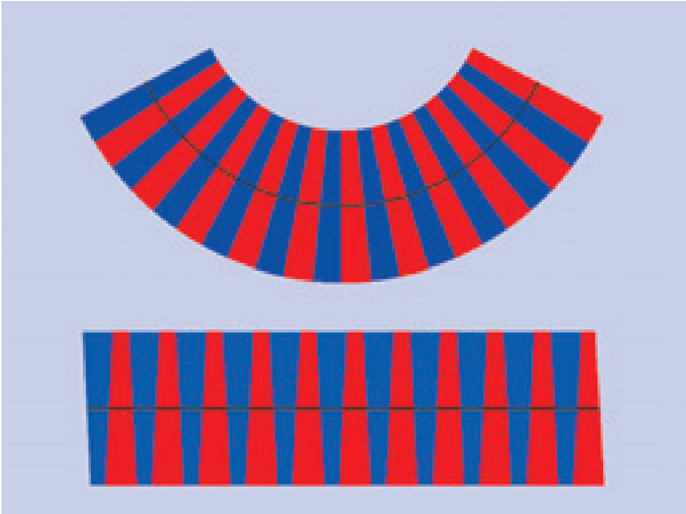


Abbildung 5
Ziehharmonika-Effekt zur Berechnung der Mantelfläche eines Kegelstumpfes

der in kleinere Sektoren einteilen und jeden zweiten davon umstülpen, verwandeln wir die Mantelfläche des Kegelstumpfes (fast) in ein Rechteck, dessen Höhe gleich der Mantellinie und dessen Breite gleich der Länge des mittleren Sektorbogens ist. Die Archimedische Quintessenz: *Zylinder und Kegelstumpf mit gleichen Mantellinien und gleichem mittleren Umfang haben gleiche Mantelflächen* (Abb. 5).

Wie viel Platz ist auf dem Globus?

Eine Kugeloberfläche ist, anders als Zylinder- und Kegeloberflächen, in allen Richtungen gekrümmt. Damit entzieht sie sich der Methode des Abrollens in eine Ebene – und stellt eine Herausforderung »neuer Dimension« für Archimedes dar. Auch diese Aufgabe löst er mit Bravour und findet: *Die Oberfläche eines Globus ist gerade viermal so groß ist wie die Fläche eines Großkreises*. Eine besonders schöne Beziehung, in der nicht einmal die Kreiszahl π vorkommt! Nach der zuvor gewonnenen Erkenntnis, dass die Mantelfläche eines Zylinders der Höhe $h = 2r$ und Breite $2r$ den Flächeninhalt $2hr\pi = 4r^2\pi$ hat, also das Vierfache der Kreisfläche, läuft alles darauf hinaus, zu zeigen, dass die Kugeloberfläche ebenso groß wie die Mantelfläche eines Kreiszylinders derselben Höhe und Breite ist. Diese Tatsache wird noch heute in der Kartographie genutzt, denn sie eröffnet die Möglichkeit flächentreuer Abbildungen von (Teilen) der Erdkugel auf rechteckige Karten (Abb. 6).

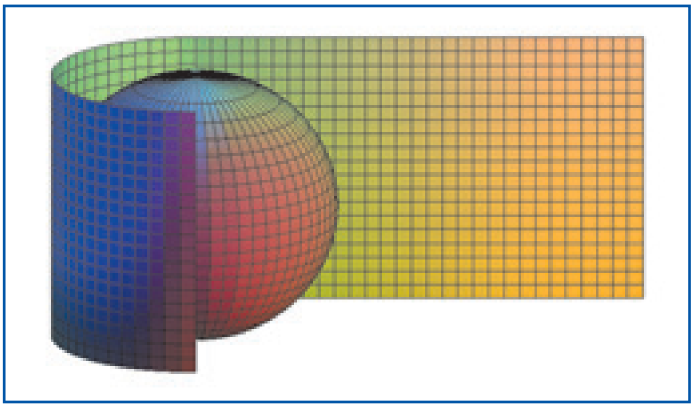


Abbildung 6
Archimedische Zylinderprojektion

Archimedes lässt zum Beweis einen Kreis samt um- oder einbeschriebenen Vielecken um einen Durchmesser rotieren und erhält auf diese Weise flache Kegelscheiben, welche die Kugel berühren. Ohne auf beweistechnische Feinheiten einzugehen (die sich im Originaltext über mehrere Seiten hinziehen), schildern wir hier nur die »zündende Idee« (Abb. 7).

Aus Ähnlichkeitsgründen verhält sich die jeweilige Mantellinie s einer Kegelscheibe zu deren Dicke d umgekehrt proportional wie der Radius r von Kugel und Zylinder zum mittleren Radius x der Scheibe, so dass die jeweiligen Flächen als Produkte aus Mantellinie und Umfang gleich sind:

$$2sx\pi = 2dr\pi.$$

Macht man die Kegelscheiben immer flacher, so nähert sich die Summe ihrer Mantelflächen mehr und mehr der Kugeloberfläche an – und andererseits ergibt diese Summe gerade die Zylindermantelfläche.

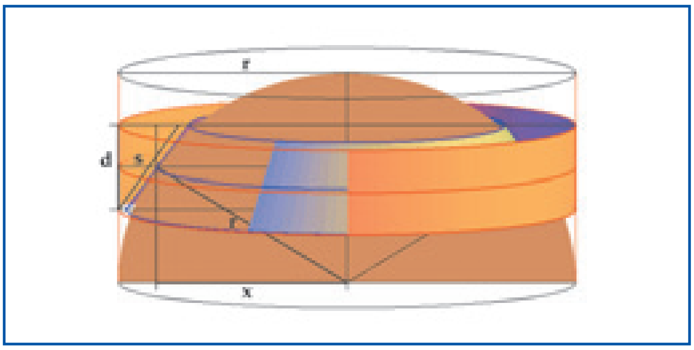


Abbildung 7
Mantelflächen von Kegel, Kugel und Zylinder

Der Rauminhalt von Säulen und Pyramiden

Was schon Eudoxos und andere griechische Mathematiker vor Archimedes wussten: Eine

Säule über einer beliebigen (nicht notwendig kreisförmigen) Grundfläche hat genau das dreifache Volumen einer gleich hohen Pyramide bzw. eines Kegels über derselben Fläche. In einem wichtigen Spezialfall ist das »offensichtlich«: nämlich dann, wenn die Grundfläche ein Quadrat und die Höhe gleich der Länge der Grundseite ist. Der entstehende Würfel zerfällt nämlich in drei gleiche quadratische Pyramiden, wenn man eine Ecke mit allen anderen verbindet und den Würfel entlang der entstehenden Innenflächen aufschneidet (Abb. 8).

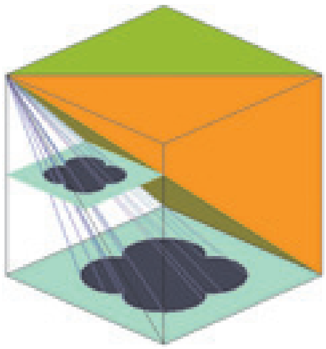


Abbildung 8 links
Würfel, Pyramide und Kegel

Scheibchenweise: Das Prinzip von Cavalieri

Dieses ebenso einfache wie nützliche Prinzip ist nach Bonaventura Cavalieri, einem Mathematiker des frühen 17. Jahrhunderts und Wegbereiter der Infinitesimalrechnung von Leibniz und Newton, benannt. Es wurde aber implizit schon von antiken Geometern benutzt: *Haben zwei Körper in jeder Höhe gleich große waagerechte Schnittflächen, so haben sie auch gleiche Volumina*. Damit leitet man nun mühelos aus dem Spezialfall der Würfelpyramiden die Formel für einen Kegel mit beliebig geformter Grundfläche ab:

Kegelvolumen =
1/3 Grundfläche mal Höhe.

Die Archimedische Proportionsformel, das Verhältnis von Kegel, Kugel und Zylinder betreffend, erledigt man nun mit einem hübschen Trick: Wie bei einer Pusteblume zerlegt man die Kugel in viele kleine Kegel mit Spitze im Zentrum der Kugel. (Eigentlich sind es keine Kegel, sondern Kugelsektoren; aber wenn deren Öffnungswinkel winzig klein wird, ist dieser Unterschied unerheblich. Das zu zeigen, erfordert mathematische Präzision; und Archimedes nahm es mit solchen Details sehr genau.) Die 1/3-Formel auf jeden einzelnen Kegel angewandt zeigt, dass das Volumen einer Kugel mit Radius r gleich einem Drittel Radius mal Oberfläche sein muss, und da diese mit der Mantelfläche des Zylinders übereinstimmt, gleich einem Drittel des Zylindervolumens.

Es gibt noch ein ganz anderes, sehr elegantes Argument für die Formel:

Kegelvolumen + Kugelvolumen = Zylindervolumen,

das sich allerdings in dieser Form wohl nicht in den erhaltenen Schriften von Archimedes findet. Wir schneiden aus einem Kreiszylinder der Höhe r und Breite $2r$ einen Kegel aus, dessen Zentrum, Höhe und Breite mit denen des Zylinders zusammenfällt (Abb. 9).

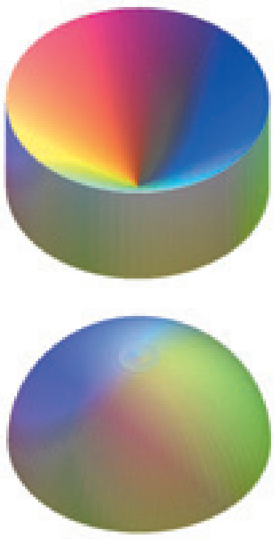


Abbildung 9 Mitte
Hohlkegel und Halbkugel

Betrachten wir einen waagerechten Schnitt durch Hohlkegel und Halbkugel in gleicher Höhe h. Jedes Mal ist der Flächeninhalt der herausgeschnittenen Scheiben gleich $(r^2 - h^2)\pi$, und zwar im Falle des Doppelkegels als Differenz zweier Kreisscheiben mit den Radien r und h, im Falle der Kugel dagegen als Fläche eines Kreises, dessen Radius sich mit dem Satz von Pythagoras ergibt. Summation über alle solchen Scheiben führt in beiden Fällen auf das gleiche Volumen (Abb. 10).

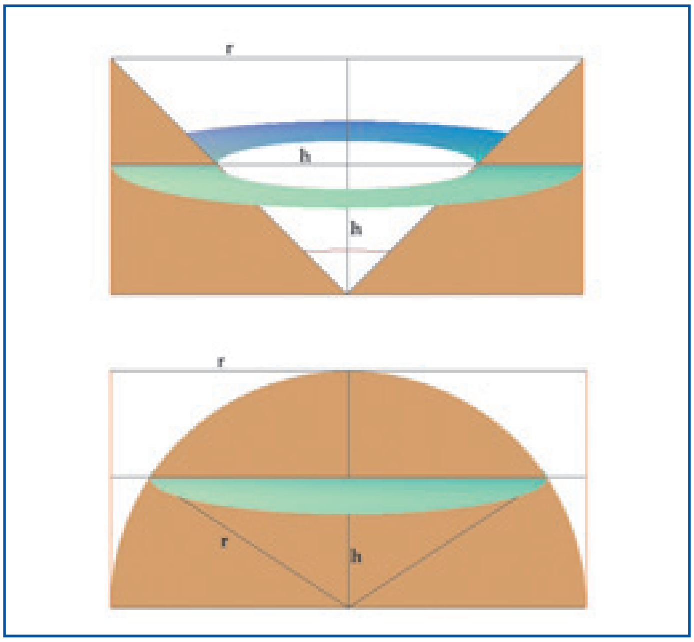


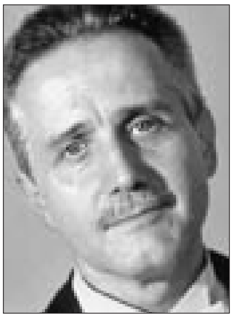
Abbildung 10 unten
Querschnitt durch Hohlkegel und Halbkugel

Das Ei des Kolumbus

Der Anekdote nach hat Kolumbus die physikalisch unmögliche Aufgabe, ein Ei auf seinem »Südpol« zum Stehen zu bringen, durch brachiale Gewalt gelöst, indem er die »Polkappe« einfach eindrückte. Obwohl das sicher kein besonders wissenschaftliches Vorgehen war, gilt seine Aktion bis heute als der Inbegriff einer unkonventionellen Idee – und solche braucht die Wissenschaft gleichermaßen, will sie echte Fortschritte hervorbringen. Wir sahen, dass die Bestimmung von Volumen und Oberfläche einer Kugel einer derartigen zündenden Idee bedurfte. Bei Eiern wird die Sache sicher nicht einfacher… Wir nehmen als idealisiertes Ei ein Ellipsoid, das durch Drehung einer Ellipse um die längere (senkrechte) Achse entsteht (die in der Na-

»Der Unterschied ist, meine Herren, dass Sie es hätten tun können, ich hingegen es getan habe.«

Kolumbus im Jahr 1493 über seine Entdeckung der Neuen Welt.



Prof. Dr. Marcel Erné
Jahrgang 1947, ist seit 1989 Professor für Mathematik an der Fakultät für Mathematik und Physik, seit 2005 am Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik, www.iazd.uni-hannover.de/~erne/

tur vorkommenden Eier haben nur annähernd diese Form). Etwas behutsamer auf den Spuren des Kolumbus wandelnd, entfernen wir (wie zuvor aus dem Zylinder) aus dem Inneren des Ellipsoids einen Doppelkegel, und zwar so, dass das entstehende »ausgehöhlte Ei« ebenso hoch wie breit wird. Und nun kommt

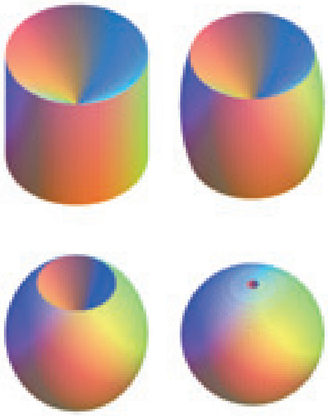


Abbildung 11
Wandlung vom Hohlkegelzylinder zur Kugel

der Clou: *Dieser Restkörper hat unabhängig von den Proportionen des Eies stets das gleiche Volumen wie eine gleich breite Kugel!* Kugel und Hohlkegelzylinder ergeben sich als Grenzfälle. Einen kurzen Beweis und Animationen zur wunderbaren Wandlung des Kolumbus-Eies findet man auf meiner Website (Abb. 11).

Dem Augenschein nach verändert sich auch die Oberfläche des wandelnden Ostereies nicht – aber das stimmt nur beinahe, es treten kleine Abweichungen von weniger als 5 % auf – mit dem bloßen Auge nicht erkennbar! Darin liegt eben der Unterschied zu der hundertprozentig exakten Aussage, dass die Volumina *genau* gleich bleiben! Und das freut den Mathematiker.

O wie so trügerisch ...

können heuristische Betrachtungen zu Flächenvergleichen sein! Wie wäre es mit folgender Idee zur Bestimmung der Kugeloberfläche? Eine halbkugelige Teeschale mit Radius r rollen wir in alle Richtungen auf einer Untertasse ab, die wir zu einer Kreisscheibe vereinfachen. Dabei trifft jeder Punkt der Schale genau einen Punkt der Untertasse, sofern wir dieser einen Durchmesser geben, der gerade so groß wie der Halbkreis der Schale ist, also $r\pi$ (Abb. 12).

Damit wäre die Oberfläche der Teeschale also gleich derjenigen der Untertasse:

$$2r^2\pi = \left(\frac{r\pi}{2}\right)^2\pi,$$

und nach Kürzen gleicher Faktoren auf beiden Seiten hätten wir

$$\pi^2 = 8\ ??$$

Das kann ja wohl kaum sein, da π größer als 3, somit π^2 größer als 9 ist. Wo steckt der Fehler?

Die azimutale Projektion

Wie man es richtig macht, um flächentreue Abbildungen von Kugelschalen auf Kreisscheiben zu bekommen – auch das hat bereits Archimedes erkannt:

Die Oberfläche einer Kugelschale ist gleich einer Kreisfläche, deren Radius gleich dem Abstand vom Rand zum Scheitel (Pol) der Kugelschale ist.
Die folgende raffinierte Kugelabbildung leistet daher die gewünschte Flächentreue und damit ein klassisches Verfahren zur Konstruktion von geographischen Karten in der Nähe der Pole (Abb. 13).

Perlen der Geometrie

Perlen gelten als besonders schöne Objekte. Und mit ihnen wollen wir unseren geometrischen Exkurs beschließen. Wie findet man das Gewicht einer zylindrisch durchbohrten Perlenkugel gegebener Dichte, wenn die Länge des Bohrloches (nicht aber der Durchmesser der Perle) bekannt ist (Abb. 14)?

Es ist kaum zu glauben, aber wahr: alle solchen Perlen haben genau das gleiche Gewicht wie eine (undurchbohrte) Kugel, deren Durchmesser so lang wie das Bohrloch ist! Wieder hilft Pythagoras beim Beweis … Vielleicht haben Sie Lust bekommen, es selbst zu probieren?

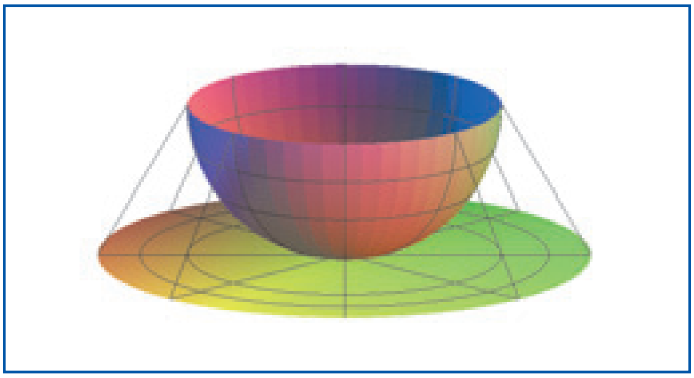


Abbildung 12
Teeschale und Untertasse

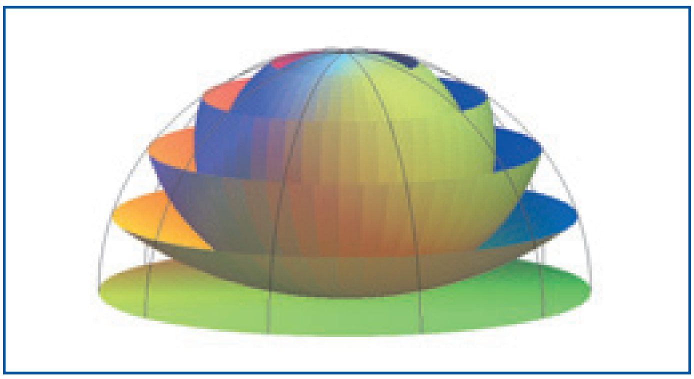


Abbildung 13
Gleich große Kugelschalen

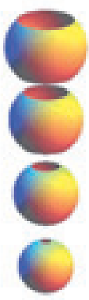


Abbildung 14
Lauter gleich schwere Perlen