Warum der Dicke wirklich schneller ist

ALLTAGSPHÄNOMENE MATHEMATISCH ERKLÄRT

Dass dicke Radfahrer schneller den Berg heruntersausen als dünne Radfahrer, sieht einleuchtend aus. Aber warum eigentlich? Ein Wissenschaftler des Instituts für Angewandte Mathematik zeigt an diesem Beispiel, wie Mathematik unseren Alltag durchwirkt und wie Mathematiker sich solchen Alltags-Phänomenen nähern – und sie lösen.

Selten ist die Diskrepanz zwischen Glauben und Wissen größer als bei der Frage: Was ist eigentlich Mathematik? Womit beschäftigt sich ein Mathematiker den lieben langen Tag? Manchmal kommt die wohl eher lästerlich gemeinte Zusatzbehauptung: Die Zahlen kennen wir doch alle!

Also dass Mathematiker mit Zahlen umgehen, ist nicht mal mehr als Vorurteil bei wenigen zu sehen, es scheint unumstößliches Wissen in der Komplementärmenge der Mathematikerinnen und Mathematiker. Ja doch, Zahlen haben wir schon auch. Unsere Bücher haben schließlich Seitenzahlen. Wir lieben es, unsere Definitionen und Sätze schön ordentlich zu nummerieren. Aber die Bruchrechnung gehört in die sechste Klasse und Addieren und Subtrahieren lernt man schon in der Grundschule. Mathematiker rechnen nicht. Manche Mathematiker kokettieren sogar damit, dass sie nicht rechnen können oder es zumindest nicht gerne tun.

Was also ist Mathematik?

Sie werden es mir vielleicht nicht glauben, aber Sie sind in fast allen Lebensbereichen mit ihr konfrontiert.

(a) Wenn Sie beim Arzt Ihr CT erstellen lassen, so sollten Sie dem Mathematiker Johann Radon danken. Er hat mit der heute nach ihm benannten Radon-Transformation das ermöglicht.

(b) Wenn Sie beim nächsten Mal Ihren Weg mit dem GPS suchen, schicken Sie doch einen kleinen Gruß auch an Carl Friedrich Gauß, den Prinzeps Mathematicorum. Er hat mit seiner nicht-euklidischen Geometrie, die zeitgleich auch von Janos Bolyai entwickelt wurde, den Weg für Albert Einstein zur Allgemeinen Relativitätstheorie geebnet. Die steckt tatsächlich im GPS.

(c) Die Computer wären ohne das Dualsystem von Gottfried Wilhelm Leibniz nicht vorstellbar.

(d) In den Klima-Modellen, mit denen die Wissenschaftler den Klimawandel ziemlich gut prognostizieren können, stecken mit den Finiten Elementen und den Randelementen zwei der modernen großen Forschungsgebiete der Angewandten Mathematik.

Die Beispiele ließen sich noch lange fortsetzen. Um Ihnen aber jetzt einen kleinen Einblick in die Denkweise der Mathematiker zu geben, lade ich Sie ein, mit mir folgendes Beispiel zu betrachten.

Sind dicke Radfahrer bergab schneller?

Ist Ihnen das auch schon passiert? Sie sind mit Freunden so gemütlich bei einer Radtour. Und auf einmal geht es bergab. Jeder freut sich, die Pessimisten sehen schon dem nächsten Berg entgegen. Auf jeden Fall sind nicht alle zur gleichen Zeit unten, sondern die Dicken zeigen uns ihren Allerwertesten und schnurren davon; sie sind einfach schneller. Oder ist das wie mit den Kirschen in Nachbars Garten? Die sind ja auch immer größer.

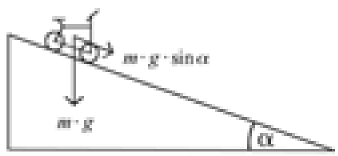
Ein verbreiteter Irrtum

Stellt man dieses Problem physikalisch angehauchten Leuten, haben die schnell eine Antwort parat.

Natürlich sind die Dicken schneller unten, denn bei ihnen ist ja der Hangabtrieb wesentlich größer.

Das hört sich physikalisch an und klingt gut. Betrachten wir es aber genau:

Unter dem Hangabtrieb verstehen wir die Kraft, die den Radfahrer ins Tal zieht. Das ist im Wesentlichen sein Gewicht G. Wegen der abfallenden Straße dürfen wir von dieser Kraft aber nur ihren Anteil G_t in Richtung der Straße, also den tangentiellen Anteil, nehmen.



Schauen wir auf die Skizze, so erkennen wir mit geschultem Blick:

$$G_t = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

Dabei ist m die Masse und $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$ die Erdbeschleunigung.

Die Hangabtriebskraft G_t hängt also von der Masse ab. Also ist diese Kraft für einen dicken Radfahrer größer als für einen spindeldürren.

Folglich ist er auch schneller unten, sagen diese Leute.

Da diese Antwort sehr schlüssig klingt, hat man schlechte Karten, wenn man auf einer weiteren Diskussion besteht. Das Problem ist ja schon längst gelöst, warum noch weiter nachdenken.

Aber jetzt komme ich. Die einfachen Antworten haben manchmal einen kleinen Haken, den wir nicht unterschätzen dürfen. Wie ist das genau mit der Bewegung?

Newtons Gesetz

Isaac Newton hat bereits im 17. Jahrhundert die Grundaxiome der Physik aufgestellt. Eines der bedeutendsten Gesetze ist das folgende:

Kraft F = Masse m mal Beschleunigung a

Will man einen Klotz schneller bewegen, ihn also beschleunigen, muss man mehr Kraft aufwenden. Der zugehörige Proportionalitätsfaktor ist dabei die Masse m des Klotzes.

Dieses Gesetz beschreibt alle Bewegungsvorgänge. Wenden wir es auf unsere Radfahrer an, so haben wir die Kraft, die beim Bergabfahren die Radler nach unten zieht, ja schon oben ausgerechnet; es ist unsere Hangabtriebskraft. Neu kommt jetzt die rechte Seite hinzu, die wir oben bei der einfachen Überlegung nicht mit einbezogen haben. Da liegt unser Haken.

Bezeichnen wir die Bewegung der Radfahrer mit x(t), sei also $x(t)$ der zurückgelegte Weg, und sei t die Zeit, so erhalten wir die Beschleunigung als:

$$a = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Damit kommen wir zur ersten Grundgleichung des Bergabfahrens:

$$m \cdot g \cdot \sin\alpha = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Und schauen wir genau hin. In dieser Gleichung steht links und rechts die Masse m. Da es ein positiver Faktor ist – die Radfahrer sollen ja nicht wie ein Suppenkaspar am fünften Tag aussehen – kann m auf beiden Seiten locker gekürzt werden. Dann aber ist die ganze Gleichung unabhängig von der Masse. Damit ist natürlich auch eine Lösung dieser Gleichung unabhängig von der Masse. Wenn wir also so einfach vorgehen wollen, kommen wir zwingend zu dem Schluss, dass die Fahrt der Radfahrer unabhängig von ihrem Gewicht verläuft: Dicke und Dünne kommen gleichschnell unten an.

Abbildung
Wer schwer bepackt den Berg herunterfährt, ist schneller. Mathematiker erklären warum.

Diese Gleichung erklärt auch genau, warum der dicke und der dünne Radfahrer beim senkrechten Bergabfahren, also dem freien Fall, zugleich unten aufknallen. Denn die Masse m spielt ja keine Rolle. Damit fallen beide gleich schnell. Wir können sogar leicht für den senkrechten Fall, also $\alpha = 90°$ und damit $\sin\alpha = 1$ das Fallgesetz ausrechnen. Die Gleichung lautet ja dann, nachdem wir m gekürzt haben:

$$g = \frac{d^2x(t)}{dt^2}.$$

Wir müssen also nur zweimal integrieren, um $x(t)$ zu erhalten. Das ergibt

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

so wie es in unserem Schulbuch steht.

Vielleicht ist also alles nur Einbildung. Aber irgendetwas bleibt hängen mit den Dicken. Eigentlich haben sie doch eine größere Reibung bei ihrer Masse. Der Luftwiderstand ist doch wohl auch größer. Sie sollten also später unten sein.

Das Experiment

Dem Autor wurde bei der Frage etwas mulmig. Sollte ich mich ransetzen und eine Erklärung suchen für etwas, was vielleicht falsch war? Vielleicht sind die Dicken ja nicht schneller, unser Neid spiegelt uns das nur vor! Also nahm ich mir zwei gleich große Kugeln, die aber unterschiedlich schwer waren. Das war ideal für mein Experiment; denn wenn man sich mal dicke und dünne Menschen genauer ansieht, so sind die Dicken gar nicht viel breiter. Das Mehr an Gewicht hängt nach vorne raus. Das sieht man auch in Flugzeugen. In der Economy-Klasse reichen die Sitze gerade so für mich. Als dann mal so ein richtiger Rancher aus Texas neben mir Platz nahm, hat der doch tatsächlich in den Sitz reingepasst. Aber die Stewardess musste ihm eine Verlängerung für den Sitzgurt bringen.

Also der Luftwiderstand wegen der Breite ist bei dicken und dünnen Radfahrern ziemlich gleich. Meine Kugeln waren passend. Zuerst ließ ich sie im freien Fall auf den Boden plumpsen. Wie es schon Galilei und Newton vorhergesagt hatten, kamen sie gleichzeitig unten an, man hörte nur einen gemeinsamen Bumps.

Dann besorgte ich mir ein Brett und ließ sie gemütlich die schiefe Ebene hinunterkullern. Welch ein Erstaunen, als sich bei verschiedenen Neigungen des Brettes stets die dicke Kugel auf und davon machte und als erste unten war. Das roch nach Prinzip und könnte die dicken Radfahrer beruhigen.

Wo also liegt unser Fehler? Wir haben die Reibung links liegen gelassen. Das geht natürlich nicht. Die Physik lehrt uns, dass es verschiedene Arten von Reibung gibt.

Die Coulomb-Reibung

Diese Reibung tritt auf, wenn ein Körper oder ein Klotz auf einer Unterfläche gleitet, die nicht geschmiert ist. Das gibt dann solch ein scheußliches Geräusch, es kratzt und quietscht. Diese Reibung R_c wird nach Coulomb benannt, und sie gehorcht dem Gesetz:

$$R_c = \mu \cdot F_N,$$

wenn wir mit F_N die Normalkomponente der Gewichtskraft und mit μ den Reibungskoeffizienten bezeichnen.

In unserer Skizze oben finden wir für die Normalkomponente F_N des Gewichts:

$$F_N = m \cdot g \cdot \cos\alpha.$$

Das bringt für die Coulomb-Reibung:

$$R_c = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha.$$

Diese Reibung hindert unsere Radfahrer beim Vorwärtskommen; daher müssen wir sie von der Hangabtriebskraft subtrahieren. Wenn wir das einbeziehen in unsere Überlegung mit den Stramplern, so erhalten wir die Gleichung:

Kraft – Reibung
= Masse mal Beschleunigung

also

$$m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}.$$

Die unbekannte Funktion $x(t)$ steckt diesmal etwas komplizierter in der Gleichung. Im Augenblick wollen und müssen wir uns gar nicht darum bemühen, $x(t)$ zu finden; denn wie man sofort erkennt, lässt sich hier wieder auf beiden Seiten die Masse m herauskürzen.

Dann aber ist die Gleichung und damit auch ihre Lösung $x(t)$ und unser Radfahrerproblem wiederum völlig unabhängig von der Masse m: Dicke und Dünne würden also gleich schnell fahren.

Diese zugegebenermaßen einfache »Lösung« löst daher unser Problem nicht; denn unser Experiment und unsere Erfahrung weisen uns auf den unzweifelhaften Vorteil von ein paar mehr Pfunden beim Bergabfahren hin. Wir müssen also weiter suchen nach der korrekten Erklärung.

Damit wir nicht zu schwierige Gleichungen lösen müssen, gehen wir mal davon aus, dass die Räder ordentlich gewartet sind und daher auch nur sehr wenig von dieser Reibung besitzen. Gut schmieren und schön aufpumpen, dann können wir die Coulomb-Reibung vernachlässigen.

Die Stokes-Reibung

Die Physik kennt noch eine weitere Reibungsart, die Stokes-Reibung:

Nicht zu große Körper, die sich nicht zu schnell durch eine Flüssigkeit oder ein Gas bewegen, werden proportional zu ihrer Geschwindigkeit v abgebremst. Den Proportionalitätsfaktor nennen wir η, die Viskosität:

$$F_S = \eta \cdot v.$$

Das ist der Luftwiderstand, den wir jetzt doch einbauen werden, auch wenn er für beide Fahrer gleich ist. Zusammen mit dem Gesetz von Newton erhalten wir jetzt die Gleichung:

$$m \cdot g \cdot \sin\alpha - \eta \frac{dx(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Beachten Sie zum einen wieder, dass wir die Stokes-Reibung subtrahieren müssen, weil sie sich ja für die Fortbewegung als hinderlich erweist. Zum zweiten sehen wir jetzt endlich, dass sich die Masse m nicht mehr herauskürzen lässt, im zweiten Term mit der Stokes-Reibung ist kein m! Damit also erhalten wir, wenn wir es schaffen, die Gleichung nach $x(t)$ aufzulösen, eine Lösung, die noch die Masse m enthält. Ob sich das dann richtig auf unsere Biker anwenden lässt, müssen wir noch diskutieren.

Wir setzen noch eine Kleinigkeit für den Beginn unseres Bergabfahrens fest. Und zwar wollen wir verabreden, dass der Dicke und der Dünne am Berg oben stehen, wo wir auch unseren Koordinatenursprung hinlegen. Am Beginn sei also noch kein Weg zurückgelegt, also

$$x(0) = 0.$$

Außerdem wollen wir für diesen Anfang verabreden, dass beide in Ruhe verharren, um dann irgendwann gleichzeitig losgelassen zu werden, also

$$\frac{dx(0)}{dt} = 0.$$

Dies sind so genannte Anfangsbedingungen, die wir ziemlich willkürlich festlegen, aber so ist es doch vernünftig.

Damit haben wir insgesamt eine Anfangswertaufgabe mit einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Wau, das haut rein bis in die Socken. Es sollte Sie aber nicht erschrecken, denn wir haben doch nur einige Namen zusammengestellt, um uns gepflegt im Rahmen der Mathematik ausdrücken zu können. Zur Lösung hat diese Benennung noch nicht beigetragen. Immerhin wissen wir jetzt, in welchem Kapitel eines Fachbuches wir nachschlagen müssten, um etwas zur Lösung zu finden.

Wir übergehen diese Aufgabe und schreiben gleich das Ergebnis hin:

$$x(t) = -\frac{g \cdot m^2 \cdot \sin\alpha}{\eta^2} + \frac{g \cdot m^2 \cdot \sin\alpha}{\eta^2} \cdot e^{-\frac{\eta}{m}t} + \frac{g \cdot m \cdot \sin\alpha}{\eta} t$$

Uff, das ist ja noch gräulicher! Die Masse m steht an vier verschiedenen Stellen. Wie soll man da erkennen, welchen Einfluss sie hat? Wart's nur ab, Mr. Higgins, der Mathematiker wird's schon richten.

Diskussion der Lösung

Wir machen einen kleinen Trick:

Wir ersetzen die Exponentialfunktion durch ihre Potenzreihe. Dabei wählen wir gleich das negative Vorzeichen wie in unserer Lösung:

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} + - \ldots$$

Jetzt kommt etwas Rechnerei, wenn wir das einsetzen. Auch wenn das normalerweise keinen Spaß macht, sollten Sie das hier durchführen; denn es liefert uns ein erstaunliches Ergebnis. Die ersten Terme heben sich gegenseitig weg, und es bleibt nur eine ziemlich einfache Gleichung für unsere Lösung:

$$x(t) = g \cdot \sin\alpha \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{g \cdot \sin\alpha \cdot \eta}{m} \cdot \frac{t^3}{3!} + - \ldots$$

Sie sind nicht begeistert und brechen nicht in Jubelstürme aus? Das sollten Sie aber; denn jetzt sind wir fertig mit unseren Radfahrern.

Schauen Sie genau hin. Die Masse m tritt erst im zweiten Term auf. Der erste Term ist bis auf die Konstante $g \cdot sin\alpha$ gerade die gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Erinnern Sie sich an die 11. Klasse? Das ist doch, wenn wir die Reibung vernachlässigen, voll zu erwarten, dass unsere Fahrer immer schneller werden, sogar quadratisch mit der Zeit t.

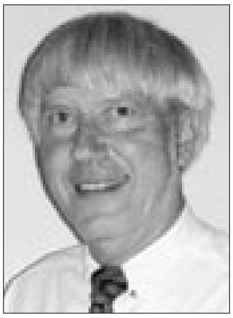
Im zweiten Term, der durch die Reibung hinzukommt, steht die Masse m im Nenner. Wenn der Nenner nun größer wird, wird bekanntlich der Bruch kleiner. Denken Sie an $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{100}$. Der ganze zweite Term ist also für den dicken Radfahrer kleiner. Und er wird subtrahiert! Das ist das Entscheidende. Für den dicken Radfahrer wird also weniger durch die Reibung subtrahiert als für den dünnen. Er kann also in der gleichen Zeit einen weiteren Weg zurücklegen.

Die restlichen Terme können wir vernachlässigen, denn sie spielen keine so große Rolle. Im Nenner steht ja die Fakultät der natürlichen Zahlen, und die wird furchtbar schnell furchtbar groß.

Jetzt haben wir das Phänomen vollständig aufgelöst. Unsere Kugeln haben sich also nicht naturwidrig verhalten, und die Mathematik kann alles erklären.

Lassen Sie uns das noch einmal zusammenfassen. Zu Beginn hatten wir eine simple Erklärung mit der Hangabtriebskraft. Die war aber mit dem Newton-Axiom nicht zu vereinbaren. Dann haben wir die normale Reibung eingebaut, konnten aber unser Experiment wieder nicht erklären. Erst als wir die Stokes-Reibung, also doch den Luftwiderstand, hinzugenommen haben, wurde ein Schuh draus.

Haben Sie erkannt, was der Mathematiker wirklich macht? Er rechnet schon zwischendurch, aber das ist nicht das Wesentliche. Darum haben wir uns auch gestattet, die Berechnung der Lösung nicht vorzuführen. Entscheidend ist die Interpretation des Ergebnisses. Noch entscheidender ist der kleine Trick mit der Potenzreihe gewesen, der uns zur richtigen Interpretation verholfen hat. Das sind die Stärken, die Mathematiker auszeichnen oder auszeichnen sollte.



Dr. Dr. h. c. Norbert Herrmann
Jahrgang 1943, war bis 2007 Akademischer Oberrat am Institut für Angewandte Mathematik der Leibniz Universität Hannover

Literatur:

- N.H.: Höhere Mathematik für Ingenieure, Physiker und Mathematiker Oldenbourg Wissenschaftsverlag München et al., 2. Aufl. 2007
- N.H.: Mathematik ist überall Oldenbourg Wissenschaftsverlag München et al., 3. Aufl. 2007
- N.H.: Können Hunde rechnen? Oldenbourg Wissenschaftsverlag München et al., 2007