Irrationalität und Transzendenz

ODER DIE LEHRE VOM UNMÖGLICHEN

Die Begriffe »Irrationalität« und »Transzendenz« vermutet man eher in Philosophie oder Theologie. Welche Rolle sie in der Mathematik spielen, und was das mit der sprichtwörtlichen »Quadratur des Kreises« zu tun hat, erläutert ein Wissenschaftler des Instituts für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik.

Er zirkelte und rechnete,
wo er ging und stand,
bedeckte Unmassen von
Papier mit Figuren, Buchstaben,
Zahlen, algebraischen Symbolen,
und sein gebräuntes Gesicht,
das Gesicht eines scheinbar
urgesunden Mannes,
trug den visionären und
verbissenen Ausdruck der Manie.

Thomas Mann, Der Zauberberg

Aus der Schule kennt man die Formel für den Umfang U eines Kreises mit dem Radius r:

$$U = 2\,\pi\,\mathrm{r}. \qquad (1)$$

Dabei ist $\pi = 3,141592...$ die so genannte *Kreiszahl*. Der Umstand, dass in einer so einfachen und fundamentalen Formel eine solche merkwürdige Konstante auftaucht, hat seit jeher die Menschen verwundert und fasziniert, Mathematiker und Laien gleichermaßen. Staatsanwalt Paravant im links zitierten Zauberberg ist ein treffendes (wenn auch fiktives) Beispiel.

Einen Meilenstein in der Geschichte der Zahl π und der Mathematik insgesamt verdanken wir dem in Hannover geborenen Mathematiker Ferdinand von Lindemann[1]. Er bewies im Jahre 1882, dass π eine *transzendente Zahl* ist. Aus diesem Satz folgt die Unmöglichkeit der sprichwörtlichen Quadratur des Kreises, der sich Staatsanwalt Paravant in Manns »Der Zauberberg« mit solcher (vergeblichen) Besessenheit widmet.

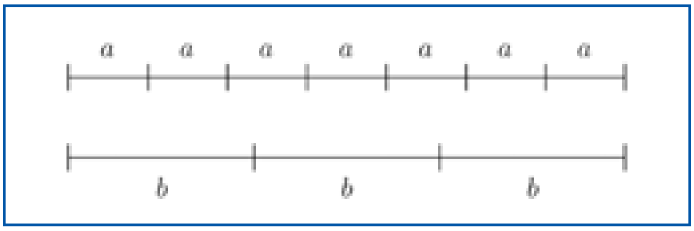
Ziel des vorliegenden Artikels ist in erster Linie, den Begriff der »transzendenten Zahl« zu erklären und zu erhellen. Ein (erwünschter) Nebeneffekt könnte darin bestehen, die Mathematik mal von einer anderen Seite zu zeigen: Als eine Wissenschaft, die nicht nur Probleme löst, sondern die auch zeigt, dass gewisse Probleme *unlösbar* sind.

Rationale Zahlen

Rationale Zahlen sind Bruchzahlen, bei denen im Zähler und Nenner ganze Zahlen stehen, wie z.B.

$$\frac{3}{7}, \frac{-487}{32}, \text{ etc.}$$

Das Adjektiv *rational* leitet sich vom lateinischen Wort *Ratio* ab, das in diesem Zusammenhang soviel wie *Verhältnis oder Proportion* bedeutet[2]. Durch eine rationale Zahl kann also das Verhältnis zweier Größen zueinander beschrieben werden. Im folgenden Bild stehen z.B. die beiden Streckenlängen a und b im Verhältnis 3 zu 7 (Abb. unten).



Diese Beziehung kann man symbolisch durch die Formel

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$$

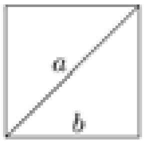
ausdrücken. Allerdings sind a und b selber keine Zahlen; nur ihr Verhältnis wird durch eine (rationale) Zahl bestimmt. So bedeutet z.B. die Aussage *»Der Fensterrahmen hat eine Höhe von 1,52 Meter«* eigentlich: *»Das Verhältnis der Höhe des Fensterrahmens zur Länge eines Meters ist gleich* $\frac{152}{100}$. Die Streckenlänge *Meter* ist dabei eine mehr oder weniger willkürlich gewählte Einheit – in anderen Ländern benutzt man andere Einheiten, z.B. *yard*.

Letzten Endes beruht jeder Messvorgang auf ein und demselben Prinzip: um eine Größe zu messen, also durch eine Zahl zu beschreiben, versucht man sie mit einer »Vergleichsgröße« in ein rationales Verhältnis zu setzen.

Die Irrationalität von $\sqrt{2}$

Aus mathematischer Sicht hat die Sache aber einen Haken:

Bei vielen Problemen treten Verhältnisse auf, die man nicht als rationale Zahl darstellen kann. Das wohl einfachste Beispiel ist das Verhältnis der Diagonalen zur Seitenlänge eines Quadrates:



Sei $x = a / b$ das Verhältnis dieser beiden Längen. Aus dem Satz des Pythagoras folgt dann die Beziehung

$$x^2 = 2. \qquad (2)$$

Um die Zahl x konkret zu bestimmen, müssten wir die »Quadratwurzel aus 2 ziehen«. Das ist aber, zumindest innerhalb der Welt der rationalen Zahlen, unmöglich, denn:

Es gibt keine rationale Zahl x, für die die Gleichung (2) erfüllt ist!

Wie kann man sich da so sicher sein? Kann es nicht sein, dass man die Lösung bislang einfach noch nicht gefunden hat? Nein, man kann tatsächlich beweisen, dass es keine rationale Lösung gibt (siehe Kasten S. 4).

Reelle Zahlen

Um das Verhältnis zweier beliebiger Größen durch eine Zahl auszudrücken, müssen wir den Bereich der rationalen Zahlen erweitern. Zu diesem Zweck führt man die so genannten *reellen Zahlen* ein.

Eine mathematisch exakte Definition der reellen Zahlen würde den Rahmen dieses Artikels sprengen. Die Grundidee ist aber relativ einfach und lässt sich ganz gut umschreiben mit: *»Eine reelle Zahl ist eine Zahl, die sich mit beliebig hoher Präzision durch rationale Zahlen annähern läßt«.*

Was bedeutet das konkret für unser Problem, die Quadratwurzel aus $\sqrt{2}$ zu berechnen? Wenn wir davon ausgehen, dass $x = \sqrt{2}$ eine reelle Zahl ist, so folgt z.B. aus der Ungleichung

$$14^2 = 196 < 200 < 15^2 = 225 \qquad (4)$$

und der Gleichung $x^2 = 2$ durch eine einfache Umformung die Abschätzung

$$1{,}4 = \frac{14}{10} < x < 1{,}5 = \frac{15}{10} \qquad (5)$$

Nach Abrunden auf die erste Nachkommastelle erhält man so den Näherungswert $x \approx 1{,}4$. Um die zweite Nachkommastelle zu bestimmen, rechnen wir nach derselben Methode (aber mit höherem Aufwand) die Abschätzung

$$1{,}41 < x < 1{,}42, \text{ d.h. } x = 1{,}41\ldots$$

nach. Es ist klar, dass man auf diese Weise (und mit entsprechendem Rechenaufwand) den numerischen Wert von $x = \sqrt{2}$ mit beliebig hoher Präzision abschätzen kann. Mit einem Taschenrechner erhält man z.B.

$$x = \sqrt{2} \approx 1.414213562.$$

Aber auch dies ist nur ein Näherungswert. Aus der oben bewiesenen Tatsache, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, folgt die *prinzipielle Unmöglichkeit*, den Wert von $\sqrt{2}$ exakt zu bestimmen.

Nun könnte man einwenden, dass auch rationale Zahlen eine unendliche Dezimalentwicklung haben können. Das stimmt zwar, aber beim Rechnen mit rationalen Zahlen ist es unnötig und rechnerisch ungeschickt, Dezimalbrüche zu verwenden. Außerdem ist die Dezimalbruchentwicklung einer rationalen Zahl entweder endlich oder sie ist unendlich und periodisch, wie z.B.

$$\frac{3}{7} = 0{,}\overline{428571}$$
$$= 0{,}428571428571428\ldots$$

Man kann also sehr wohl den exakten Wert einer rationalen Zahl durch das Hinschreiben von endlich vielen Ziffern beschreiben. Bei einer irrationalen Zahl wie $\sqrt{2}$ ist das anders: Ihre Dezimalbruchentwicklung ist unendlich und nicht periodisch.

Die Kreiszahl π

Ein weiteres prominentes Beispiel für eine irrationale Zahl ist die Kreiszahl π. Sie ist definiert als das Verhältnis zwischen dem Umfang U und dem Durchmesser $d = 2r$ eines Kreises:

$$\pi = \frac{U}{2r}$$

Der entscheidende Punkt ist, dass diese Zahl nicht von dem gewählten Kreis abhängt und somit eine universelle Konstante ist.

Das Problem der *Berechnung* dieser Konstante hat eine lange Geschichte. So war z.B. der Näherungswert

$$\pi = 3\,\frac{1}{6}$$

um ca. 1850 v. Chr. in Ägypten bekannt *(Moskauer Papyrus)*. Archimedes von Syrakus (287-221 v. Chr.) erhielt durch eine raffinierte Rechnung die Abschätzung

$$\frac{223}{71} < \pi \quad \frac{22}{7}$$

Abgesehen von der Tatsache, dass dies ein für viele Zwecke brauchbarer Näherungswert ist, haben wir es hier in zweierlei Hinsicht mit einer fundamentalen Neuerung zu tun. Erstens gibt Archimedes einen *Beweis* an, dass der wirkliche Wert von π zwischen den beiden angegebenen Schranken liegt. Zweitens lässt sich seine Methode im Prinzip beliebig verfeinern und kann zum Berechnen von *beliebig genauen* Näherungswerten von π benutzt werden. Das stimmt allerdings nur »im Prinzip«: Die notwendigen Rechnungen werden sehr schnell so kompliziert, dass sie nicht mehr praktikabel sind.

Die nächsten echten Fortschritte bei der Berechnung von π gab es erst mehr als 1800 Jahre nach Archimedes, und sie waren eng verbunden mit

1 siehe auch den Artikel »Mathematiker in Hannover« in diesem Heft

2 Die ebenfalls denkbare Bedeutung *Vernunft* würde die irrationalen Zahlen in ein falsches Licht rücken.

der Entwicklung der *Infinitesimalrechnung*. So entdeckten z.B. James Gregory (1638-1675) und Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) unabhängig voneinander die Formel

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Hier wird π exakt durch eine *unendliche* Summe dargestellt – die man aber nicht wirklich berechnen, sondern nur durch endliche Summen annähern kann. Mit einer ähnlichen Formel konnte Abraham Sharp im Jahre 1699 die Zahl π bis auf 71 Nachkommastellen genau ausrechnen.

Aber genau wie bei der Berechnung von $\sqrt{2}$ sind das alles nur Näherungswerte. Den exakten Wert von π kann man nicht berechnen, da π eine irrationale Zahl ist. Dies wurde im Jahre 1768 von Johann Heinrich Lambert bewiesen.

Algebraische und transzendente Zahlen

Der Satz von Lindemann aus dem Jahre 1882 geht aber noch viel weiter und zeigt, dass die Zahl π auf eine viel radikalere Art irrational als zum Beispiel $\sqrt{2}$. Um diese Aussage präzise formulieren zu können, muss man wissen, was algebraische und transzendente Zahl sind.

Eine reelle Zahl x heißt *algebraisch*, wenn sie die Lösung einer Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (6)$$

ist, wobei $a_0, \dots, a_n$ ganze Zahlen sind. Ist die Zahl x nicht algebraisch, so nennt man sie *transzendent*.

So ist zum Beispiel jede rationale Zahl algebraisch: $x = a/b$ ist eine Lösung der Gleichung $bx - a = 0$.

Auch die irrationale Zahl $x = \sqrt{2}$ ist algebraisch, da sie die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ löst.

Etwas anders formuliert: eine algebraische Zahl – selbst wenn sie irrational ist – kann man zumindest indirekt bestimmen als die Lösung einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten. Es ist also relativ einfach, eine algebraische Zahl zu definieren.

Im Gegensatz dazu ist es unmöglich, eine transzendente Zahl durch eine »rein algebraische« Formel zu definieren. Transzendenz ist gewissermassen die höchste Form der Irrationalität.

Über viele Jahrhunderte hinweg haben sich immer wieder Menschen bemüht, eine solche Konstruktion zu finden. Die Vergeblichkeit dieses Bemühens hat schließlich dazu geführt, dass der Begriff *Quadratur des Kreises* zu einer Metapher für eine unlösbare Aufgabe geworden ist[3].

Wir wollen im Folgenden argumentieren, dass aus der

Die Quadratur des Kreises

Unter der Quadratur des Kreises versteht man die Aufgabe, aus einem vorgegebenen Kreis ein Quadrat mit exakt demselben Flächeninhalt zu konstruieren.

Das Verhältnis der Seitenlänge des Quadrates zum Kreisradius wäre dann gleich der Quadratwurzel aus π.

1

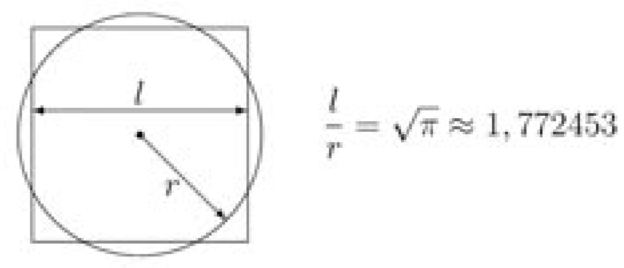


Abbildung 1
Kreis und Quadrat mit demselben Flächeninhalt

Die Quadratur des Kreises

Unter der Quadratur des Kreises versteht man die Aufgabe, aus einem vorgegebenen Kreis ein Quadrat mit exakt demselben Flächeninhalt zu konstruieren.

Das Verhältnis der Seitenlänge des Quadrates zum Kreisradius wäre dann gleich der Quadratwurzel aus π.

Transzendenz von π die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises folgt.

Dazu müssen wir zuerst festlegen, was man unter einer »geometrischen Konstruktion« versteht. Wir verwenden im Folgenden eine eher restriktive Auslegung dieses Begriffes und erlauben nur die so genannten *Konstruktionen mit Zirkel und Lineal*. Dabei kon-

2

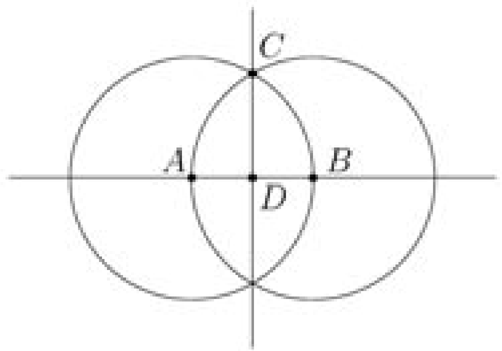


Abbildung 2
Konstruktion von $\sqrt{3}/2$

3 zitiert nach Wikipedia

Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$

Angenommen, es gibt eine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$. Wie jede rationale Zahl kann man x als gekürzten Bruch schreiben, d.h. in der Form $x = a/b$ mit teilerfremden ganzen Zahlen a, b.

Durch Umformen der Gleichung $x^2 = 2$ erhält man dann die Gleichung

$$a^2 = 2b^2. \tag{3}$$

An dieser Gleichung sieht man, dass a^2 durch 2 teilbar, also eine gerade Zahl ist. Da aber das Quadrat einer ungeraden Zahl wieder ungerade ist, muss a selbst gerade sein. Wenn a aber gerade ist, so ist $a^2 = 2b^2$ sogar durch 4 teilbar. Das ist aber nur möglich, wenn b^2 gerade ist. Wie wir schon gesehen haben, folgt daraus, dass b gerade ist.

Insgesamt haben wir gezeigt: sind a, b ganze Zahlen, die die Gleichung (3) erfüllen, so sind a und b beide gerade Zahlen. Das widerspricht aber der Annahme, dass a und b teilerfremd sind. Mit diesem Widerspruch haben wir die Existenz einer rationalen Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ ad absurdum geführt. Deshalb gilt: $\sqrt{2}$ ist irrational!

Prof. Dr. Stefan Wewers
Jahrgang 1969, ist seit 2007 Professor für Zahlentheorie am Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik.

struiert man, unter Vorgabe von zwei gegebenen Punkten A und B, weitere Punkte durch wiederholtes Anwenden der folgenden Schritte:

- man zeichnet mit einem Lineal eine Gerade, die durch zwei gegebene Punkte verläuft,
- man zeichnet mit einem Zirkel den Kreis mit einem gegebenen Mittelpunkt, der durch einen weiteren gegebenen Punkt verläuft,
- man bestimmt die Schnittpunkte aller Geraden und Kreise.

Eine reelle Zahl x heißt *konstruierbar*, wenn sie als Längenverhältnis von Strecken zwischen Punkten dargestellt werden kann, die nach den obigen Regeln konstruiert wurden.

Ein Beispiel sieht man in der *Abbildung 2*. Die drei Punkte A, B, C sind offenbar die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks. Aus dem Satz des Pythagoras folgt, dass das Verhältnis zwischen Höhe und Grundlinie dieses Dreiecks durch die Zahl

$$x = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866025...$$

gegeben ist. Die reelle Irrationalzahl $\sqrt{3}/2$ ist also konstruierbar.

Die Quadratur des Kreises ist möglich, wenn die Zahl $\sqrt{\pi}$ konstruierbar ist. Es ist leicht einzusehen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn π konstruierbar ist. Aber wir wissen – Lindemann sei Dank – dass π transzendent ist. Die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises folgt also aus dem Satz:

Konstruierbare Zahlen sind algebraisch.

Wir wollen kurz andeuten, warum dies so ist. Bei einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal erhält man neue Punkte immer als Schnittpunkte von Geraden und Kreisen. Um die Koordinaten solcher Schnittpunkte zu berechnen, muss man entweder eine lineare oder eine quadratische Gleichung lösen, im letzteren Fall also eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{7}$$

Zum Lösen solcher Gleichungen benötigt man aber nur die vier Grundrechenarten und das Wurzelziehen. Konstruierbare Zahlen können also durch wiederholtes Anwenden dieser Operationen bestimmt werden. Man erhält auf diese Weise immer nur verschachtelte Wurzelausdrücke wie z.B.

$$x = 1 + \sqrt{3 - 2\sqrt{5}},$$
$$y = 2 - \sqrt{1 + \sqrt{3 - 2\sqrt{5}}}.$$

Solche Zahlen sind automatisch algebraisch. So ist zum Beispiel die Zahl x eine Lösung der Gleichung

$$x^4 - 4x^3 + 8x - 16 = 0.$$

Die entsprechende Gleichung für die Zahl y ist schon relativ kompliziert:

$$y^8 - 16y^8 + 108y^6 - 400y^5 + 880y^4 - 1152y^3 + 840y^2 - 288y + 16 = 0.$$

Es kommt auch nicht so sehr darauf an, wie diese Gleichung aussieht. Für die Algebraizität von y genügt es, dass es irgendeine solche Gleichung gibt.

Im Umkehrschluss folgt nun: eine transzendente Zahl – wie z.B. π – kann nicht konstruierbar sein. Deshalb ist die Quadratur des Kreises unmöglich.

Quellen

- Wikipedia: Quadratur des Kreises.
- Ferdinand Lindemann: Über die Zahl π, Mathematische Annalen 20, 213 - 225 (1882).